



МЧС РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

«Уральский институт государственной противопожарной службы
Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны,
чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий»

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации по подготовке к экзамену

Направление подготовки 38.03.04
Государственное и муниципальное управление

Екатеринбург
2021

Математика [Текст] : методические рекомендации по подготовке к экзамену. Направление подготовки 38.03.04 Государственное и муниципальное управление / сост.: С. А. Худякова, Л. Якупова, А. В. Шпаньков. – Екатеринбург : Уральский институт ГПС МЧС России, 2021. – 60 с.

Составители:

Худякова С. А., доцент кафедры математики и информатики Уральского института ГПС МЧС России, кандидат педагогических наук, доцент;

Якупова Л. В., преподаватель кафедры математики и информатики Уральского института ГПС МЧС России;

Шпаньков А. В., старший преподаватель кафедры математики и информатики Уральского института ГПС МЧС России.

Методические рекомендации по подготовке к экзамену по дисциплине «Математика» предназначены для обучающихся по направлению подготовки 38.03.04 Государственное и муниципальное управление, и составлены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по указанному направлению подготовки, согласно рабочей (учебной) программе дисциплины (уровень бакалавриата)

Рассмотрено и одобрено к использованию в образовательном процессе на заседании кафедры от 31.08.2021 г., протокол № 1.

Рассмотрено и одобрено к использованию в образовательном процессе на заседании методического совета Уральского института ГПС МЧС России.

© Уральский институт ГПС МЧС России, 2021

© Кафедра математики и информатики, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Требования к результатам освоения дисциплины	5
Структура дисциплины	5
Рекомендации по темам дисциплины	6
Тема 1. Линейная алгебра и аналитическая геометрия	6
Тема 2. Математический анализ	24
Тема 3. Теория вероятностей	52
Литература	58
Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», профессиональные базы данных и информационно-справочные системы необходимых для освоения дисциплины	59

ВВЕДЕНИЕ

Методические рекомендации по подготовке к экзамену по дисциплине «Математика» предназначены для обучающихся по направлению подготовки 38.03.04 Государственное и муниципальное управление (уровень бакалавриата), и составлены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 38.03.04 Государственное и муниципальное управление (уровень бакалавриата), согласно рабочей программе дисциплины.

Целями освоения учебной дисциплины «Математика» являются:

- формирование математических знаний, умений и навыков, необходимых для изучения других общенаучных и специальных дисциплин, самостоятельного изучения специальной литературы, математического исследования прикладных вопросов;
- воспитание профессионально значимых личностных качеств обучающихся.

Для достижения данных целей предусматривается решение следующих основных задач:

- освоение системы базовых знаний по математике (основ высшей математики);
- определение места и роли математики в системе общенаучных и специальных дисциплин, понимание значимости математических знаний для предстоящей профессиональной деятельности;
- развитие у обучающихся умения строить математические модели типовых задач в процессе их решения;
- развитие критического мышления;
- формирование способности к самостоятельной деятельности и саморегуляции.

ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

знать:

– основы математической теории, исходя из требований рынка труда в области безопасности жизнедеятельности.

уметь:

– решать стандартные профессиональные задачи с применением методов математического анализа и моделирования;

– решать задачи, используемые при принятии управленческих решений, используя математический язык и математическую символику.

владеть:

– навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности;

– математическими методами при принятии управленческих решений.

СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы, или 144 часа.

Распределение тем дисциплины «Математика»

№ п/п	Наименование тем
1	Линейная алгебра и аналитическая геометрия
2	Математический анализ
3	Теория вероятностей
Итоговый контроль – экзамен	

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ТЕМАМ ДИСЦИПЛИНЫ

В данном разделе методических рекомендаций приведены вопросы, типовые задания (задачи) по изучаемой теме, указаны ссылки на литературу, которая поможет более качественно подготовиться к различным видам аттестации в соответствии с действующей рабочей программой дисциплины «Математика». По каждой теме рассмотрены решения типовых заданий (задач).

Экзамен по дисциплине «Математика» проводится в традиционной форме (теоретические вопросы и практические задания – задачи), а также может проводиться в форме письменной контрольной работы или теста.

ТЕМА 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Литература: основная: [1, 5]; дополнительная: [7].

Интернет-ресурсы: [2], [3].

Теоретические вопросы

1. Определение матрицы, равных между собой матриц, квадратной, единичной, нулевой матрицы.
2. Действия над матрицами: сложение матриц, умножение матрицы на действительное число, умножение матриц, транспонирование матрицы.
3. Понятие обратной матрицы, формула обратной матрицы.
4. Решение систем линейных уравнений методом Крамера.
5. Решение систем линейных уравнений матричным методом.
6. Определение вектора, противоположного вектору данному, длины вектора, нулевого, единичного вектора, коллинеарных, равных и компланарных векторов.
7. Координаты вектора. Свойства координат.
8. Линейные операции над векторами: сложение векторов, умножение вектора на действительное число.
9. Определение скалярного произведения векторов, свойства скалярного произведения векторов. Вычисление скалярного произведения векторов в координатах прямоугольной системы координат.
10. Определение векторного произведения векторов. Свойства векторного произведения векторов. Вычисление векторного произведения векторов в координатной форме в прямоугольной системе координат.

11. Определение смешанного произведения векторов, его геометрический смысл. Свойства смешанного произведения векторов. Вычисление смешанного произведения векторов в координатах прямоугольной системы координат.
12. Геометрические и физические приложения скалярного, векторного и смешанного произведений векторов.
13. Способы задания прямой линии на плоскости. Виды уравнений прямой.
14. Нахождение угла между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Формула для нахождения расстояния от точки до прямой.
15. Общее уравнение линии второго порядка на плоскости. Классификация линий второго порядка на плоскости.
16. Понятия окружности, эллипса, гиперболы и параболы. Их канонические уравнения и построение в системе координат. Геометрические характеристики эллипса, гиперболы и параболы.

Примеры решения типовых практических заданий (задач)

1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -9 & 8 & 12 \end{pmatrix}$. Найти:

а) $5A - 2B$ б) $6A + 3B$.

Решение:

$$а) 5A - 2B = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -9 & 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 35 & 25 \\ -5 & 10 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 4 & -6 \\ -18 & 16 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 31 & 31 \\ 13 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$б) 6A + 3B = 6 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -9 & 8 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 42 & 30 \\ -6 & 12 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 & 6 & -9 \\ -27 & 24 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 48 & 21 \\ -33 & 36 & 60 \end{pmatrix}.$$

2. Найти произведение матриц A и B , если:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 13 \\ -7 & 12 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$а) A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 6 \cdot (-3) & 1 \cdot 6 + 6 \cdot 7 \\ -7 \cdot 0 - 4 \cdot (-3) & -7 \cdot 6 - 4 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 48 \\ 12 & -70 \end{pmatrix}.$$

$$б) A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 13 \\ -7 & 12 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + 10 \cdot 1 + 13 \cdot (-2) & 2 \cdot 5 + 10 \cdot (-2) + 13 \cdot 2 \\ -7 \cdot 3 + 12 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) & -7 \cdot 5 + 12 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 16 \\ -11 & -57 \end{pmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} 5x - 2y + z = -2; \\ 3x + 2y - z = 10; \\ 4x - 3y - 2z = 4. \end{cases}$$

Решение:

Метод Крамера.

Найдем основной определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -20 - 9 + 8 - (8 + 15 + 12) = -21 - 35 = -56 \neq 0.$$

Найдем вспомогательные определители системы:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 10 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 8 - 30 + 8 - (8 - 6 + 40) = -14 - 42 = -56;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 10 & -1 \\ 4 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -100 + 12 + 8 - (40 - 20 + 12) = -80 - 32 = -112;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 40 + 18 - 80 - (-16 - 150 - 24) = -22 + 190 = 168.$$

Найдем значения неизвестных:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-56}{-56} = 1; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-112}{-56} = 2; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{168}{-56} = -3.$$

$$\text{Проверка: } \begin{cases} 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = -2; \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) = 10; \\ 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) = 4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 = -2; \\ 10 = 10; \\ 4 = 4. \end{cases}$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ и сделать

проверку.

Решение:

Определитель матрицы равен:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0 - 8 + 0 - 0 - 0 + 9 = 1.$$

Алгебраические дополнения элементов матрицы равны:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3.$$

Обратная матрица имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \\ -4 & 9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \\ -4 & 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$\begin{aligned} A^{-1} \cdot A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \\ -4 & 9 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-4) & 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 0 + (-6) \cdot 1 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 3 + (-6) \cdot 0 + 2 \cdot (-4) & 3 \cdot 2 + (-6) \cdot 0 + 2 \cdot (-3) \\ -4 \cdot 0 + 9 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 & -4 \cdot 3 + 9 \cdot 0 + (-3) \cdot (-4) & -4 \cdot 2 + 9 \cdot 0 + (-3) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \\ -4 & 9 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) & 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-6) + 2 \cdot 9 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-6) + 0 \cdot 9 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 0 + (-4) \cdot 3 + (-3) \cdot (-4) & 3 \cdot 1 + (-4) \cdot (-6) + (-3) \cdot 9 & 3 \cdot 0 + (-4) \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. В прямоугольной системе координат даны векторы $\vec{a} = (3; -4; 5)$, $\vec{b} = (2; 3; -3)$, $\vec{c} = (-1; 1; 3)$. Найти:

- скалярное произведение векторов $2\vec{a} - 5\vec{b}$ и $3\vec{a} + \vec{b}$;
- угол между векторами \vec{a} и \vec{b} ;
- длину вектора $2\vec{a} - 5\vec{b}$;
- векторное произведение векторов $2\vec{a} - 5\vec{b}$ и $3\vec{a} + \vec{b}$;
- площадь треугольника (параллелограмма), построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} ;
- смешанное произведение векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} ;
- объем параллелепипеда (треугольной призмы, тетраэдра), построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} .

Решение:

- скалярное произведение векторов $2\vec{a} - 5\vec{b}$ и $3\vec{a} + \vec{b}$.

$$\vec{a} = (3; -4; 5), \vec{b} = (2; 3; -3), \vec{c} = (-1; 1; 3).$$

$$2\vec{a} - 5\vec{b} = 2 \cdot (3; -4; 5) - 5 \cdot (2; 3; -3) = (6; -8; 10) - (10; 15; -15) = (-4; -23; 25).$$

$$3\vec{a} + \vec{b} = 3 \cdot (3; -4; 5) + (2; 3; -3) = (9; -12; 15) + (2; 3; -3) = (11; -9; 12).$$

Скалярное произведение векторов:

$$(2\vec{a} - 5\vec{b}) \cdot (3\vec{a} + \vec{b}) = (-4; -23; 25) \cdot (11; -9; 12) = -44 + 207 + 300 = 463.$$

- угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .

Найдем косинус угла между векторами \vec{a} и \vec{b} :

$$\cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 + 5 \cdot (-3)}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + (-3)^2}} =$$

$$= \frac{6 - 12 - 15}{\sqrt{9 + 16 + 25} \cdot \sqrt{4 + 9 + 9}} = \frac{-17}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{22}} = \frac{-17}{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{11}} =$$

$$= \frac{-17}{10 \cdot \sqrt{11}} = \frac{-17\sqrt{11}}{110}.$$

Угол между векторами \vec{a} и \vec{b} :

$$(\angle \vec{a}, \vec{b}) = \pi - \arccos \frac{17\sqrt{11}}{110}.$$

- длину вектора $2\vec{a} - 5\vec{b}$ /

$$2\vec{a} - 5\vec{b} = 2 \cdot (3; -4; 5) - 5 \cdot (2; 3; -3) = (6; -8; 10) - (10; 15; -15) = (-4; -23; 25).$$

Длина вектора $2\vec{a} - 5\vec{b}$:

$$|2\vec{a} - 5\vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + (-23)^2 + 25^2} = \sqrt{16 + 529 + 625} = \sqrt{1170}.$$

е) векторное произведение векторов $2\vec{a} - 5\vec{b}$ и $3\vec{a} + \vec{b}$.

1 способ.

$$2\vec{a} - 5\vec{b} = 2 \cdot (3; -4; 5) - 5 \cdot (2; 3; -3) = (6; -8; 10) - (10; 15; -15) = (-4; -23; 25),$$

$$3\vec{a} + \vec{b} = 3 \cdot (3; -4; 5) + (2; 3; -3) = (9; -12; 15) + (2; 3; -3) = (11; -9; 12).$$

Векторное произведение векторов $2\vec{a} - 5\vec{b}$ и $3\vec{a} + \vec{b}$:

$$(2\vec{a} - 5\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -23 & 25 \\ 11 & -9 & 12 \end{vmatrix} = -276\vec{i} + 36\vec{k} + 275\vec{j} + 253\vec{k} + 225\vec{i} + 48\vec{j} =$$

$$= -51\vec{i} + 323\vec{j} + 289\vec{k} = (-51; 323; 289).$$

2 способ.

$$(2\vec{a} - 5\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 6\vec{a} \times \vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b} - 15\vec{b} \times \vec{a} - 5\vec{b} \times \vec{b} = \vec{0} + 2\vec{a} \times \vec{b} + 15\vec{a} \times \vec{b} - \vec{0} =$$

$$= 17\vec{a} \times \vec{b} = 17 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 17 \cdot (12\vec{i} + 9\vec{k} + 10\vec{j} + 8\vec{k} - 15\vec{i} + 9\vec{j}) =$$

$$= -51\vec{i} + 323\vec{j} + 289\vec{k} = (-51; 323; 289).$$

д) площадь треугольника (параллелограмма), построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} .

Площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , равна:

$$S_{\square} = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$

Площадь треугольника, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , равна:

$$S_{\Delta} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2}.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = 17 \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 12\vec{i} + 9\vec{k} + 10\vec{j} + 8\vec{k} - 15\vec{i} + 9\vec{j} =$$

$$= -3\vec{i} + 19\vec{j} + 17\vec{k} = (-3; 19; 17).$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 19^2 + 17^2} = \sqrt{9 + 361 + 289} = \sqrt{659}.$$

$$S_{\square} = \sqrt{659} \text{ — площадь параллелограмма.}$$

$$S_{\Delta} = \frac{\sqrt{659}}{2} \text{ — площадь треугольника.}$$

е) смешанное произведение векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} ;

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 10 - 12 + 15 + 9 + 24 = 73.$$

ж) объем параллелепипеда (треугольной призмы, тетраэдра), построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} .

Объем параллелепипеда равен: $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = 73$.

Объем треугольной пирамиды равен:

$$V = \frac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{6} = \frac{73}{6} = 12\frac{1}{6}.$$

6. В прямоугольной системе координат даны точки $A(-1; 2; -7)$, $B(-4; 2; 7)$, $C(2; 3; -6)$. Найти:

а) длины сторон треугольника;

б) углы треугольника;

в) площадь треугольника.

Решение:

а) длины сторон треугольника.

$$\overrightarrow{AB} = (-4 - (-1); 2 - 2; 7 - (-7)) = (-3; 0; 14),$$

$$\overrightarrow{AC} = (2 - (-1); 3 - 2; -6 - (-7)) = (3; 1; 1),$$

$$\overrightarrow{BC} = (2 - (-4); 3 - 2; -6 - 7) = (6; 1; -13).$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 14^2} = \sqrt{9 + 0 + 196} = \sqrt{205},$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11},$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6^2 + 1^2 + (-13)^2} = \sqrt{36 + 1 + 169} = \sqrt{206}.$$

б) углы треугольника.

Найдем координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB} = (-3; 0; 14), \overrightarrow{BA} = (3; 0; -14),$$

$$\overrightarrow{AC} = (3; 1; 1), \overrightarrow{CA} = (-3; -1; -1),$$

$$\overrightarrow{BC} = (6; 1; -13), \overrightarrow{CB} = (-6; -1; 13).$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{205}, |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{11}, |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{206}.$$

Найдем скалярное произведение векторов:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 5,$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \cdot 6 + 0 \cdot 1 - 14 \cdot (-13) = 200,$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -3 \cdot (-6) - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 13 = 6.$$

Найдем косинусы углов между векторами и значение углов:

$$\cos \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{5}{\sqrt{205} \cdot \sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{2255}}{2255} = \frac{\sqrt{2255}}{451},$$

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) = \arccos \frac{\sqrt{2255}}{451}.$$

$$\cos \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \right) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{200}{\sqrt{205} \cdot \sqrt{206}} = \frac{200\sqrt{42230}}{42230} = \frac{20\sqrt{42230}}{4223},$$

$$\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \right) = \arccos \frac{20\sqrt{42230}}{4223}.$$

$$\cos \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \right) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{6}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{206}} = \frac{6\sqrt{2266}}{2266} = \frac{3\sqrt{2266}}{1133},$$

$$\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB} \right) = \arccos \frac{3\sqrt{2266}}{1133}.$$

в) площадь треугольника ABC .

$$\overrightarrow{AB} = (-3; 0; 14), \overrightarrow{AC} = (3; 1; 1), S_{\Delta} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2}.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & 14 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 3\vec{k} + 42\vec{j} - 0\vec{k} - 14\vec{i} + 3\vec{j} =$$

$$= -14\vec{i} + 45\vec{j} - 3\vec{k} = (-14; 45; -3).$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-14)^2 + 45^2 + (-3)^2} = \sqrt{196 + 2025 + 9} = \sqrt{2230}.$$

$$S_{\Delta} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{\sqrt{2230}}{2}.$$

7. Даны точки $A(1; 2; 0)$, $B(0; -1; 0)$, $C(3; -1; 2)$, $D(1; 2; 1)$. Найдите:

a) скалярное произведение векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} ;

b) векторное произведение векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} ;

- с) смешанное произведение векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , \overrightarrow{AD} ;
- д) угол между векторами \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} ;
- е) площади параллелограмма и треугольника, построенных на векторах \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} ;
- ф) объемы параллелепипеда и треугольной пирамиды.

Решение:

$$a) \overrightarrow{AB} = (0-1; -1-2; 0-0) = (-1; -3; 0),$$

$$\overrightarrow{AC} = (3-1; -1-2; 2-0) = (2; -3; 2).$$

Скалярное произведение векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} равно:
 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 2 = -2 + 9 + 0 = 7.$

$$b) \overrightarrow{AB} = (-1; -3; 0), \overrightarrow{AC} = (2; -3; 2).$$

Векторное произведение векторов \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} равно:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 3\vec{k} + 6\vec{k} + 2\vec{j} = -6\vec{i} + 2\vec{j} + 9\vec{k},$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-6; 2; 9).$$

$$c) \overrightarrow{AB} = (-1; -3; 0), \overrightarrow{AC} = (2; -3; 2), \overrightarrow{AD} = (0; 0; 1).$$

Смешанное произведение векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{AD} равно:

$$\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 6 = 9.$$

Так как смешанное произведение векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{AD} больше нуля, следовательно, тройка векторов, указанная в данном порядке, правая.

$$d) \overrightarrow{AB} = (-1; -3; 0), \overrightarrow{AC} = (2; -3; 2), \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7,$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{1+9+0} = \sqrt{10},$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}.$$

Косинус угла между векторами \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} равен:

$$\cos \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}} \right) = \frac{7}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{17}} = \frac{7\sqrt{170}}{170}.$$

Угол между векторами \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} равен: $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arccos \frac{7\sqrt{170}}{170}$.

e) $\overrightarrow{AB} = (-1; -3; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -3; 2)$, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-6; 2; 9)$.

Площадь параллелограмма, построенного на векторах \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , равна: $S_{\square} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + 9^2} = \sqrt{36 + 4 + 81} = \sqrt{121} = 11$.

Площадь треугольника, построенного на векторах \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} , равна: $S_{\Delta} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$.

f) $\overrightarrow{AB} = (-1; -3; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -3; 2)$, $\overrightarrow{AD} = (0; 0; 1)$, $\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD} = 9$.

Объем параллелепипеда равен: $V = |\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}| = 9$.

Объем треугольной пирамиды $ABCD$ равен:

$$V = \frac{|\overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} \overrightarrow{AD}|}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

8. Даны точки $A(1; 2)$, $B(0; -1)$, $C(3; -1)$. Составьте уравнения:

a) стороны AB треугольника ABC : общее, каноническое, в отрезках, с угловым коэффициентом;

b) высоты CH и медианы CD : общее, каноническое, в отрезках, с угловым коэффициентом.

Решение:

a) $A(1; 2)$, $B(0; -1)$, $\overrightarrow{AB} = (0-1; -1-2) = (-1; -3)$.

Каноническое уравнение стороны AB имеет вид: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3}$, где

$(x; y)$ – координаты текущей точки, расположенной на прямой AB ;

$(x-1; y-2)$ – координаты вектора, расположенного на прямой AB ;

$(-1; -3)$ – координаты направляющего вектора прямой AB .

Общее уравнение стороны AB получим из канонического уравнения, выполнив преобразования: $-3 \cdot (x-1) = -1 \cdot (y-2)$, $-3 \cdot (x-1) = -1 \cdot (y-2)$, $-3x+3 = -y+2$, $-3x+y+1=0$, $3x-y-1=0$.

Уравнение в отрезках стороны AB получим из общего уравнения, выполнив преобразования: $3x-y=1$, $\frac{x}{1} + \frac{y}{-1} = 1$.

Уравнение с угловым коэффициентом стороны AB получим из общего уравнения, выполнив преобразования: $y = 3x - 1$.

$$b) \quad A(1;2), B(0;-1), C(3;-1), \overrightarrow{AB} = (-1;-3),$$

$$D = \left(\frac{1+0}{2}; \frac{2-1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right).$$

Для составления общего уравнения высоты CH используем условие перпендикулярности векторов, т. е. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0$: $-1 \cdot (x-3) - 3 \cdot (y+1) = 0$, где $\overrightarrow{AB} = (-1;-3)$, $\overrightarrow{CH} = (x-3; y+1)$.

$-x+3-3y-3=0$, $-x-3y=0$, $x+3y=0$ – общее уравнение высоты CH .

Каноническое уравнение высоты CH имеет вид: $\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-1}$, где $(x; y)$ – координаты точки H , $(x-3; y+1)$ – координаты вектора \overrightarrow{CH} , $(3;-1)$ – координаты направляющего вектора прямой CH , которые получили из координат вектора $\overrightarrow{AB} = (-1;-3)$, поменяв координаты местами и изменив знак только у одной координаты.

Уравнение в отрезках высоты CH не существует, так как прямая проходит через начало координат и не отсекает отрезки на координатных осях.

Уравнение с угловым коэффициентом высоты CH получим из общего уравнения, выполнив преобразования: $3y = -x$, $y = -\frac{1}{3}x$.

9. Составить каноническое (общее, параметрические, с угловым коэффициентом, «в отрезках») уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1;3)$, $B(6;-9)$. Построить прямую в системе координат.

Решение:

$$A(-1;3), B(6;-9), \overrightarrow{AB} = (6-(-1); -9-3) = (7;-12).$$

Каноническое уравнение прямой AB имеет вид: $\frac{x-(-1)}{7} = \frac{y-3}{-12}$,

$\frac{x+1}{7} = \frac{y-3}{-12}$, где $(x; y)$ – координаты текущей точки, расположенной на прямой AB ; $(x+1; y-3)$ – координаты вектора, расположенного на прямой AB ; $(7;-12)$ – координаты направляющего вектора прямой AB .

Общее уравнение прямой AB получим из канонического уравнения, выполнив преобразования: $-12 \cdot (x+1) = 7 \cdot (y-3)$, $-12x - 12 = 7y - 21$, $-12x - 7y - 12 + 21 = 0$, $12x + 7y - 9 = 0$.

Уравнение в отрезках прямой AB получим из общего уравнения, выполнив преобразования: $12x + 7y = 9$, $\frac{12x}{9} + \frac{7y}{9} = 1$, $\frac{x}{\frac{9}{12}} + \frac{y}{\frac{9}{7}} = 1$, $\frac{x}{\frac{3}{4}} + \frac{y}{\frac{9}{7}} = 1$.

Уравнение с угловым коэффициентом прямой AB получим из общего уравнения, выполнив преобразования: $7y = -12x + 9$, $y = -\frac{12}{7}x + \frac{9}{7}$.

Выполним чертеж:

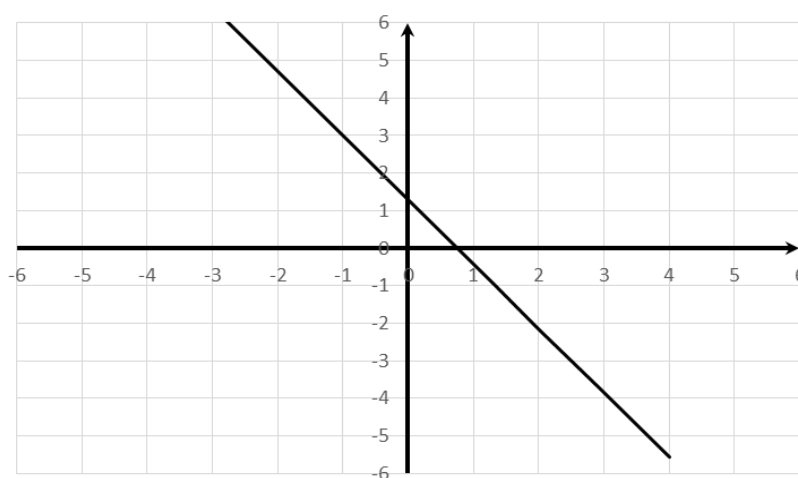


Рисунок 1

10. Составить уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = -12$, проходящей через точку $M(-7; 2)$.

Решение:

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид: $y = kx + b$.

Составим уравнение и найдем значение b : $2 = -12 \cdot (-7) + b$, $b = 2 - 84$, $b = -82$.

Запишем уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = -12x - 82$

11. Найти расстояние от точки $K(-6; -1)$ до прямой $5x + 7y + 2 = 0$.

Решение:

Расстояние от точки до прямой находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ где } (x_0; y_0) \text{ — координаты точки } K; (A; B) \text{ —}$$

координаты нормального вектора прямой $5x + 7y + 2 = 0$.

$$d = \frac{|5 \cdot (-6) + 7 \cdot (-1) + 2|}{\sqrt{5^2 + 7^2}} = \frac{|-35|}{\sqrt{60}} = \frac{35}{\sqrt{60}} = \frac{35}{2\sqrt{15}} = \frac{35\sqrt{15}}{2 \cdot 15} = \frac{7\sqrt{15}}{6}.$$

12. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $K(-6; -1)$ параллельно прямой $5x + 7y + 2 = 0$.

Решение:

Из уравнения прямой $5x + 7y + 2 = 0$, запишем координаты нормального вектора $\vec{n} = (5; 7)$.

Так как искомая прямая параллельна прямой $5x + 7y + 2 = 0$, следовательно, вектор $\vec{n} = (5; 7)$ также является ее нормальным вектором.

Составим направляющий вектор искомой прямой: $\vec{a} = (-7; 5)$ и составим каноническое уравнение прямой: $\frac{x - (-6)}{-7} = \frac{y - (-1)}{5}$,

$\frac{x + 6}{-7} = \frac{y + 1}{5}$, где $(x; y)$ – координаты текущей точки, расположенной на искомой прямой; $(x + 6; y + 1)$ – координаты вектора, расположенного на искомой прямой; $(-7; 5)$ – координаты направляющего вектора искомой прямой.

Общее уравнение искомой прямой получим из канонического уравнения, выполнив преобразования: $5 \cdot (x + 6) = -7 \cdot (y + 1)$, $5x + 30 = -7y - 7$, $5x + 30 + 7y + 7 = 0$, $5x + 7y + 37 = 0$.

13. Найти координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса, заданного каноническим уравнением $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{40} = 1$. Изобразить эллипс в системе координат.

Решение:

Геометрические характеристики:

$a = \sqrt{121} = 11$ – большая полуось эллипса, $b = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ – малая полуось эллипса, $a > b$;

$A_1(11; 0)$, $A_2(-11; 0)$, $B_1(0; 2\sqrt{10})$ и $B_2(0; -2\sqrt{10})$ – вершины эллипса;

$|A_1A_2| = 22$ – большая ось эллипса, $|B_1B_2| = 4\sqrt{10}$ – малая ось эллипса;

$c = \sqrt{121 - 40} = \sqrt{81} = 9$, $F_1(9; 0)$, $F_2(-9; 0)$ – фокусы эллипса, $|F_1F_2| = 18$ – фокусное расстояние;

$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{9}{11}$ – эксцентриситет.

Если $a > b$, то уравнения директрис эллипса имеют вид:
 $x = \pm d = \pm \frac{a}{\varepsilon}$. $x = d = \frac{11}{9} = \frac{121}{9}$, $x = -d = -\frac{11}{9} = -\frac{121}{9}$.

На рисунке 2 изображен эллипс и его геометрические характеристики.

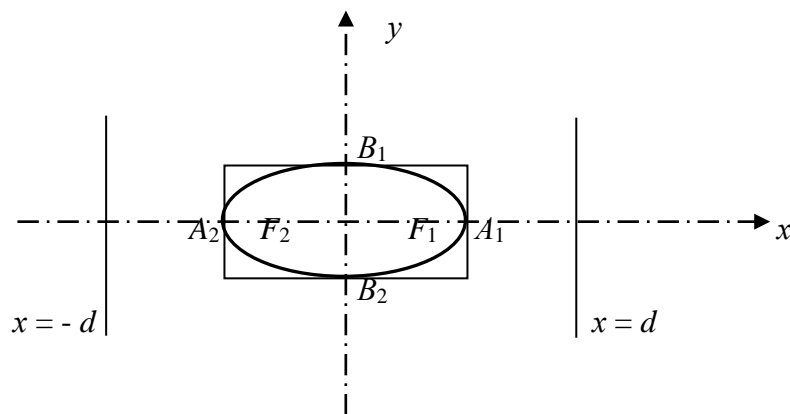


Рисунок 2

14. Найти координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис гиперболы, заданного каноническим уравнением $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Изобразить гиперболу в системе координат.

Решение:

Геометрические характеристики:

$a = \sqrt{5}$ – действительная полуось гиперболы, $b = \sqrt{4} = 2$ – мнимая полуось гиперболы;

$A_1(\sqrt{5}; 0)$, $A_2(-\sqrt{5}; 0)$ – действительные вершины гиперболы,
 $B_1(0; 2)$, $B_2(0; -2)$ – мнимые вершины гиперболы;

$|A_1A_2| = 2\sqrt{5}$ – действительная ось гиперболы, $|B_1B_2| = 4$ – мнимая ось гиперболы;

$c = \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3$, $F_1(3; 0)$, $F_2(-3; 0)$ – фокусы гиперболы,
 $|F_1F_2| = 6$ – фокусное расстояние;

$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ – эксцентриситет.

Уравнения асимптот: $y = \pm \frac{b}{a}x$, $y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}x$, $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}x$.

Если a является действительной полуосью, то уравнения директрис

гиперболы имеют вид: $x = \pm d = \pm \frac{a}{\varepsilon}$. $x = d = \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{5}{3}$, $x = -d = -\frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{5}{3}$.

На рисунке 3 изображена гипербола и ее геометрические характеристики.

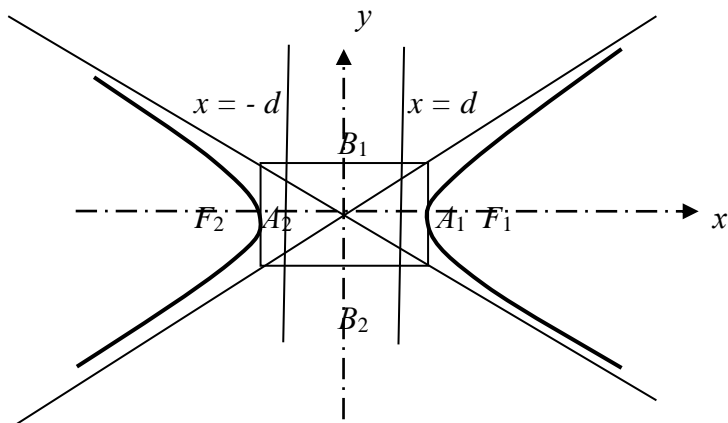


Рисунок 3

15. Найти фокальный параметр, координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $y^2 = -10x$. Изобразить параболу в системе координат.

Решение:

Ветви параболы $y^2 = -10x$ направлены влево, вершина расположена в точке с координатами $(0;0)$, найденными по формулам $\left(-\frac{b}{2a}; y\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ (рис. 4).

Координаты точки пересечения с осями Ox и Oy : $x=0$, $y=0$.

Фокальный параметр: $y^2 = -2px$, $y^2 = -10x$, $-2p = -10$, $p=5$.

Координаты фокуса параболы: $F\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$, $F\left(-\frac{5}{2}; 0\right)$.

Уравнение директрисы параболы: $x = \frac{p}{2}$, $x = \frac{5}{2}$.

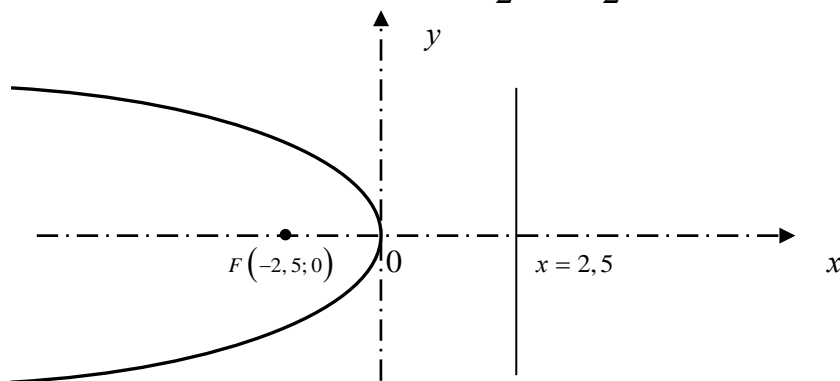


Рисунок 4

16. По уравнению кривой второго порядка определить ее тип, записать основные геометрические характеристики:

a) $x^2 + 4y^2 - 2x + 56y + 181 = 0$.

Решение:

в уравнении $x^2 + 4y^2 - 2x + 56y + 181 = 0$ выделим полные квадраты:

$$(x^2 - 2x + 1) - 1 + 4(y^2 + 14y + 49) - 196 + 181 = 0,$$

$$(x-1)^2 + 4(y+7)^2 - 16 = 0, \quad (x-1)^2 + 4(y+7)^2 = 16,$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y+7)^2}{4} = 1, \quad \frac{(x-1)^2}{4^2} + \frac{(y+7)^2}{2^2} = 1 \quad - \quad \text{каноническое}$$

уравнение эллипса.

Геометрические характеристики: $a = 4$ – большая полуось эллипса, $b = 2$ – малая полуось эллипса, $A_1(5; -7)$, $A_2(-3; -7)$, $B_1(1; -5)$ и $B_2(1; -9)$ – вершины эллипса, $|A_1A_2| = 8$ – большая ось эллипса, $|B_1B_2| = 4$ – малая ось эллипса, $c = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $F_1(1 + 2\sqrt{3}; -7)$, $F_2(1 - 2\sqrt{3}; -7)$ – фокусы эллипса, $|F_1F_2| = 4\sqrt{3}$ – фокусное расстояние, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ – эксцентриситет.

На рисунке 5 изображен эллипс и его геометрические характеристики.

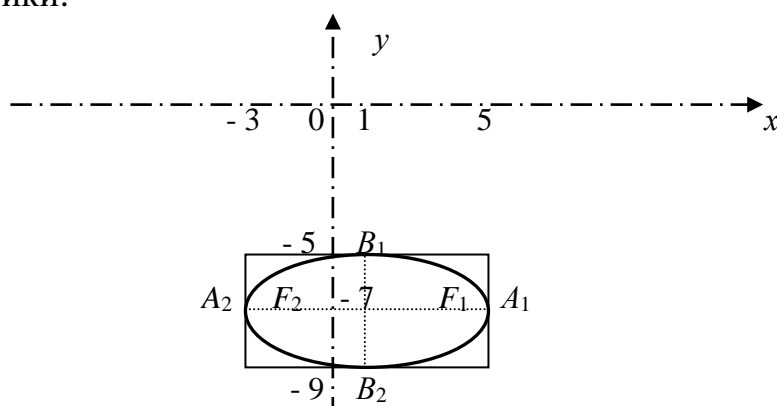


Рисунок 5

b) $x = 2 - \sqrt{6 - 2y}$.

Решение:

найдем область определения функции $x = 2 - \sqrt{6 - 2y}$:

$$\sqrt{6 - 2y} = 2 - x, \quad \begin{cases} 6 - 2y \geq 0; \\ 2 - x \geq 0. \end{cases} \quad \begin{cases} -2y \geq -6; \\ -x \geq -2. \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq 3; \\ x \leq 2. \end{cases}$$

Возведем в квадрат равенство $\sqrt{6-2y}=2-x$: $6-2y=(2-x)^2$.

Преобразуем выражение $6-2y=(2-x)^2$: $y=-\frac{1}{2}(2-x)^2+3$,
 $y=-\frac{1}{2}(4-4x+x^2)+3$, $y=-2+2x-\frac{1}{2}x^2+3$, $y=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$.

Получили уравнение параболы, ветви которой направлены вниз, вершина расположена в точке с координатами (2;3), найденными по формулам $\left(-\frac{b}{2a}; y\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ (рис. 6).

Координаты точки пересечения с осью Oy : $x=0$, $y=1$.

Координаты точек пересечения с осью Ox : $y=0$, $-\frac{1}{2}x^2+2x+1=0$,
 $x_1=\frac{-2+\sqrt{4+2}}{-1}=\frac{-2+\sqrt{6}}{-1}=2-\sqrt{6}$, $x_2=\frac{-2-\sqrt{4+2}}{-1}=\frac{-2-\sqrt{6}}{-1}=2+\sqrt{6}$.

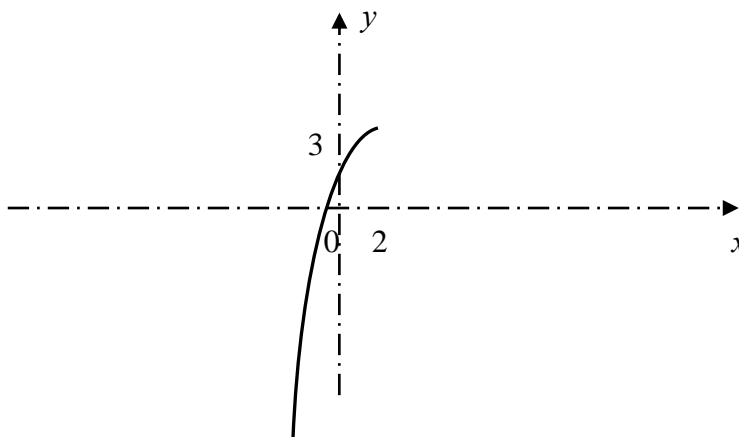


Рисунок 6

с) $4x+10+2x^2-8y^2=0$.

Решение:

в уравнении $4x+10+2x^2-8y^2=0$ выделим полные квадраты:

$$(2x^2+4x)-8y^2+10=0, \quad 2(x^2+2x+1)-2-8y^2+10=0,$$

$$2(x+1)^2-8y^2+8=0,$$

$$2(x+1)^2-8y^2=-8,$$

$$\frac{2(x+1)^2}{-8}-\frac{8y^2}{-8}=1, \quad -\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1,$$

$$-\frac{(x+1)^2}{2^2}+\frac{y^2}{1^2}=1 \text{ — каноническое уравнение гиперболы.}$$

Геометрические характеристики: $a=2$ – мнимая полуось гиперболы, $b=1$ – действительная полуось гиперболы, $A_1(1;0)$, $A_2(-3;0)$ – мнимые вершины гиперболы, $B_1(-1;1)$, $B_2(-1;-1)$ – действительные вершины гиперболы, $|A_1A_2|=4$ – мнимая ось гиперболы, $|B_1B_2|=2$ – действительная ось гиперболы, $c=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$, $F_1(-1;\sqrt{5})$, $F_2(-1;-\sqrt{5})$ – фокусы гиперболы, $|F_1F_2|=2\sqrt{5}$ – фокусное расстояние, $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{5}}{1}=\sqrt{5}$ – эксцентриситет.

Уравнения асимптот: $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$.

На рисунке 7 изображена гипербола и ее геометрические характеристики.

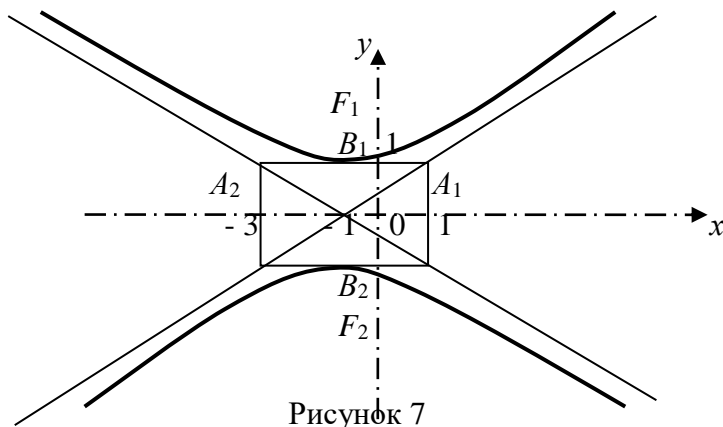


Рисунок 7

d) $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 15 = 0$.

Решение:

в уравнении $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 15 = 0$ выделим полные квадраты:

$$(x^2 + 6x) + (y^2 + 2y) - 15 = 0,$$

$$(x^2 + 6x + 9) - 9 + (y^2 + 2y + 1) - 1 - 15 = 0,$$

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 - 25 = 0,$$

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 25 \text{ – каноническое уравнение окружности.}$$

Центр окружности находится в точке с координатами $(-3; -1)$, радиус окружности равен 5 (рис. 8).

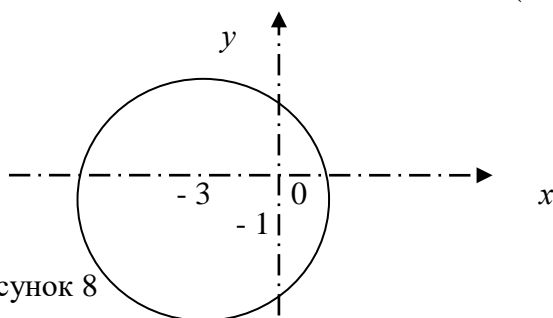


Рисунок 8

ТЕМА 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Литература: основная: [2], [3]; дополнительная: [7].

Интернет-ресурсы: [2], [3].

Теоретические вопросы

1. Определение функции. Способы задания функции.
2. Свойства функции.
3. Определение предела функции.
4. Арифметические свойства пределов (теоремы о пределах суммы, произведения и частного функций).
5. Первый и второй замечательные пределы функции и следствия из них.
6. Определение производной функции. Геометрический и физический смыслы производной.
7. Правила дифференцирования (теоремы о производной: суммы, произведения и частного функций).
8. Теорема о производной сложной функции.
9. Нахождение производной степенно-показательной функции. Логарифмическое дифференцирование.
10. Определение производных высших порядков. Физический смысл производной второго порядка.
11. Алгоритм полного исследования функции.
12. Определение первообразной функции. Теорема «Свойства первообразной».
13. Определение неопределенного интеграла, свойства неопределенного интеграла.
14. Табличный метод интегрирования неопределенного интеграла.
15. Интегрирование методом подстановки.
16. Теорема «Интегрирование по частям неопределенного интеграла».
17. Определение определенного интеграла. Геометрический смысл определенного интеграла. Свойства определенного интеграла.
18. Теорема «Формула Ньютона-Лейбница».
19. Алгоритм метода подстановки в определенном интеграле.
20. Теорема «Интегрирование по частям определенного интеграла».
21. Понятие дифференциального уравнения, его порядка; решения дифференциального уравнения (общего и частного).
22. Определение дифференциального уравнения первого порядка, его общего и частного решения.

23. Определение линейного дифференциального уравнения (ЛДУ) первого порядка. Алгоритм нахождения общего решения.
24. Общие сведения о дифференциальных уравнениях второго порядка.
25. Понятие линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами.
26. Теорема о нахождении общего решения ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.
27. Понятие линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ) второго порядка с постоянными коэффициентами. Теорема о структуре общего решения ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.
28. Интегрирование ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Примеры решения типовых практических заданий (задач)

1. Вычислить пределы функций:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 1}{2x^2 - 3x + 1}.$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 1}{2x^2 - 3x + 1} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2} - \frac{5x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = \\ &= \left[\frac{6 - 0 + 0}{2 - 0 + 0} \right] = 3. \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^{12} + 15x - 1}{x^2 - 3x + 1}.$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^{12} + 15x - 1}{x^2 - 3x + 1} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x^{12}}{x^{12}} + \frac{15x}{x^{12}} - \frac{1}{x^{12}}}{\frac{x^2}{x^{12}} - \frac{3x}{x^{12}} + \frac{1}{x^{12}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{15}{x^{11}} - \frac{1}{x^{12}}}{\frac{1}{x^{10}} - \frac{3}{x^{11}} + \frac{1}{x^{12}}} = \\ &= \left[\frac{6 + 0 - 0}{0 - 0 + 0} \right] = \infty. \end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{2x^2 - 8x}.$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{2x^2 - 8x} = \left[\frac{0}{-8} \right] = 0.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}.$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{1} = 4.$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 2x}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 2x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x \cdot 2x \sin 6x}{6x \cdot 2x \cdot \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{2x} = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} 3 = 3. \end{aligned}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1-1}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{x+1} \right)^x = [1^\infty] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{x+1} \right)^{\frac{x+1}{-1} \cdot x \cdot \frac{-1}{x+1}} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-x}{x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{1}} = e^{-1}. \end{aligned}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{9-x}}{x-5}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{9-x}}{x-5} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{9-x})(\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x})}{(x-5)(\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1-9+x}{(x-5)(\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-10}{(x-5)(\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2}{(\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x})} = \\ &= \frac{2}{(\sqrt{5-1} + \sqrt{9-5})} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}}.$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x})}{(\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x})}{(x+3-7+x)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x})}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+3} + \sqrt{7-x})}{2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2+3} + \sqrt{7-2})}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}.$$

$$n) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 12x} - x).$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 12x} - x) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 12x} - x)(\sqrt{x^2 + 12x} + x)}{(\sqrt{x^2 + 12x} + x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 12x - x^2}{(\sqrt{x^2 + 12x} + x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x}{(\sqrt{x^2 + 12x} + x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{12}{x}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12}{\left(\sqrt{1 + \frac{12}{x}} + 1 \right)} = \frac{12}{(\sqrt{1+0} + 1)} = 6.$$

2. Исследуйте функции на непрерывность на всей числовой оси. Найдите и классифицируйте точки разрыва, если они существуют. Постройте график функции.

$$a) y = \begin{cases} -2x, & x < -2; \\ \sqrt{4 + x^2}, & x \geq -2. \end{cases}$$

Решение:

область определения функции $D(y): x \in (-\infty; +\infty)$. Функция определена в точке $x = -2$ и ее окрестности.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} (-2x) = [-2(-2-0) = 4+0] = 4 \text{ — левосторонний предел,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} \sqrt{4 + x^2} = \left[\sqrt{4 + (-2+0)^2} = \sqrt{8} \right] = 2\sqrt{2} \text{ — правосторонний предел,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{4 + x^2} = 2\sqrt{2} \text{ — предел функции в точке } x = -2.$$

Так как односторонние пределы конечны, но не равны между собой, и функция в точке существует, следовательно, точка $x = -2$ является точкой разрыва первого рода (точка — скачка).

График функции построен на рисунке 9.

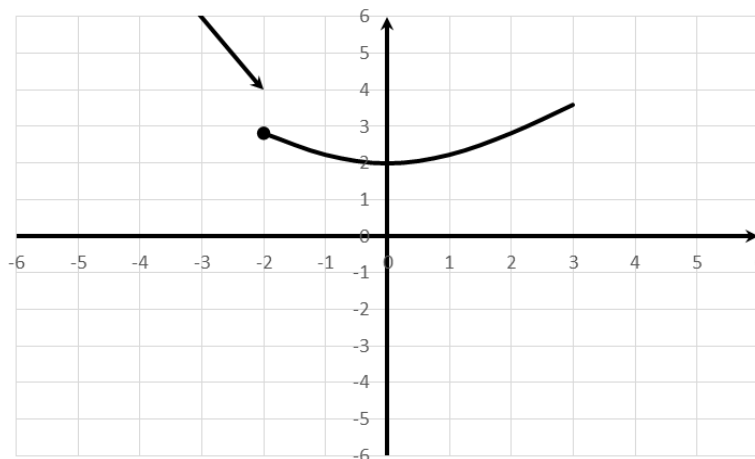


Рисунок 9

$$б) y = \begin{cases} \sqrt{-x-3}, & x \leq -3; \\ \frac{1}{1-x}, & -3 < x < 1; \\ -2, & x \geq 1. \end{cases}$$

Решение:

область определения функции $D(y_1): x \in (-\infty; -3]$,

$D(y_2): x \in (-3; 1)$, $D(y_3): x \in [1; +\infty)$.

Функция определена в точке $x = -3$ и ее окрестности.

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} \sqrt{-x-3} = \left[\sqrt{-(-3-0)-3} = \sqrt{3+0-3} \right] = 0 \quad - \quad \text{левосторонний}$$

предел,

$$\lim_{x \rightarrow -3+0} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \left[\frac{1}{1-(-3+0)} = \frac{1}{1+3-0} \right] = \frac{1}{4} \quad - \quad \text{правосторонний предел,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{-x-3} = \left[\sqrt{-(-3)-3} = \sqrt{3-3} \right] = 0 \quad - \quad \text{предел функции в точке}$$

$x = -3$.

Так как односторонние пределы конечны, но не равны между собой, и функция в точке существует, следовательно, точка $x = -3$ является точкой разрыва первого рода (точка – скачка).

Функция определена в точке $x = 1$ и ее окрестности.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \left[\frac{1}{1-(1-0)} = \frac{1}{1-1+0} = \frac{1}{0+0} \right] = +\infty \quad - \quad \text{левосторонний}$$

предел,

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} (-2) = -2 \quad - \quad \text{правосторонний предел,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (-2) = -2 \quad - \quad \text{предел функции в точке } x = 1.$$

Так как левосторонний предел равен бесконечности, следовательно, точка $x = 1$ является точкой разрыва второго рода.

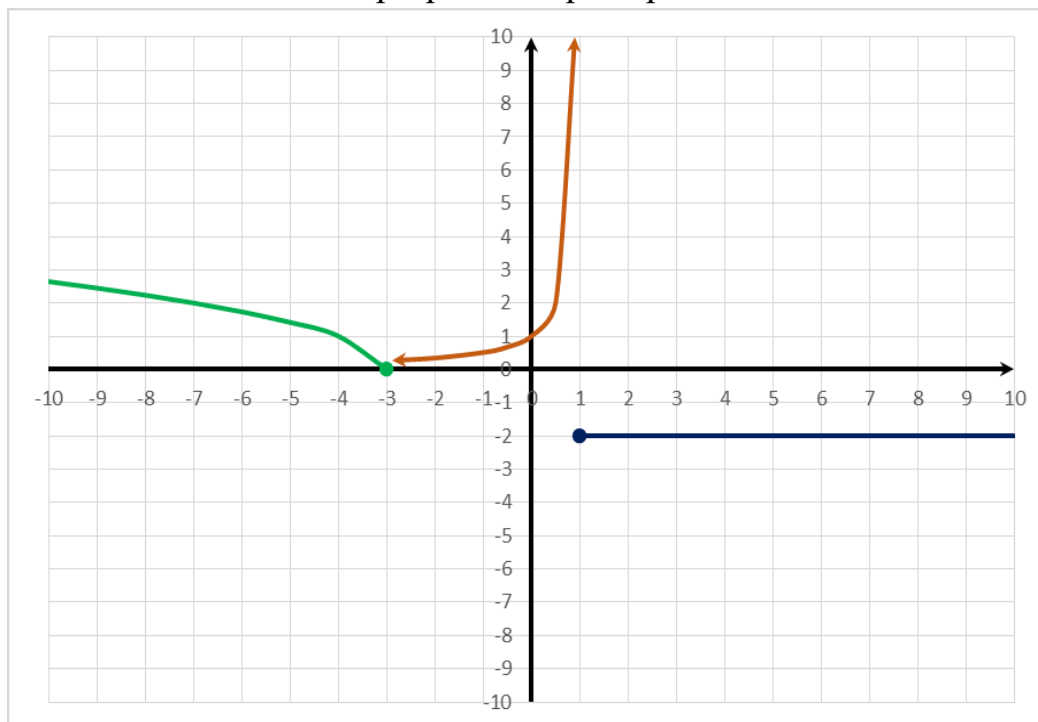


Рисунок 10

$$c) y = \frac{x^2 - 2x}{(x-2)(x+3)}.$$

Решение:

область

определения

функции

$$D(y): x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; +\infty).$$

$$\text{Преобразуем функцию: } y = \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+3)}, y = \frac{x}{x+3}.$$

Функция в точке $x = -3$ не определена и определена в ее окрестности.

$$\lim_{x \rightarrow -3-0} \frac{x}{x+3} = \left[\frac{-3-0}{-3-0+3} = \frac{-3}{-0} \right] = +\infty \text{ — левосторонний предел,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3+0} \frac{x}{x+3} = \left[\frac{-3+0}{-3+0+3} = \frac{-3}{+0} \right] = -\infty \text{ — правосторонний предел,}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{x+3} = \left[\frac{-3}{-3+3} = \frac{-3}{0} \right] = -\infty \text{ — предел функции в точке } x = -3.$$

Так как односторонние пределы бесконечны, следовательно, точка $x = -3$ является точкой разрыва второго рода.

Функция неопределенна в точке $x = 2$, но определена в ее окрестности.

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x}{x+3} = \left[\frac{2-0}{2-0+3} \right] = \frac{2}{5} - \text{левосторонний предел,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x}{x+3} = \left[\frac{2+0}{2+0+3} \right] = \frac{2}{5} - \text{правосторонний предел,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x+3} = \frac{2}{5} - \text{предел функции в точке } x = 2.$$

Точка $x = 2$ является точкой устранимого разрыва:

- односторонние пределы конечны, равны между собой;
- предел функция в точке существует;
- функция в точке не существует и не совпадает с пределом функции в точке $x = 2$.

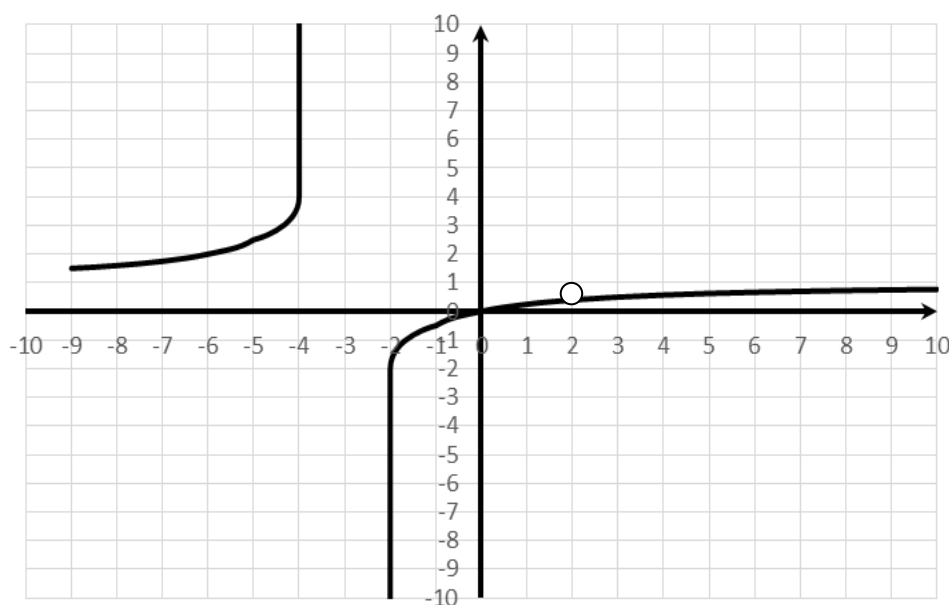


Рисунок 11

3. Найдите производные функции $y = f(x)$ первого и второго порядка:

$$a) y = 6x^4 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} + \sqrt{2}x.$$

Решение:

$$y' = 24x^3 - \frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3} + \sqrt{2}, \quad y'' = 72x^2 + \frac{4}{x^3} - \frac{18}{x^4}.$$

$$b) y = \sqrt[4]{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + 2 \operatorname{ctg} x.$$

Решение:

$$y' = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} + \frac{2}{3\sqrt{x^5}} - \frac{2}{\sin^2 x}, \quad y'' = -\frac{3}{16\sqrt[4]{x^7}} - \frac{10}{3\sqrt[3]{x^8}} + \frac{4 \cos x}{\sin^3 x}.$$

c) $y = 5^x \cdot \arcsin x + \pi$.

Решение:

$$y' = 5^x \cdot \ln 5 \cdot \arcsin x + \frac{5^x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'' = 5^x \cdot \ln^2 5 \cdot \arcsin x + \frac{5^x \cdot \ln 5 \sqrt{1-x^2} + \frac{5^x \cdot x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$$

$$= 5^x \cdot \ln^2 5 \cdot \arcsin x + \frac{5^x \cdot \ln 5 (1-x^2) + 5^x \cdot x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

d) $y = \frac{4 \log_5 x}{2x^3 + x^2}$.

Решение:

$$y' = \frac{\frac{4(2x^3 + x^2)}{x \ln 5} - 4 \log_5 x (6x^2 + 2x)}{(2x^3 + x^2)^2} = \frac{4}{(2x^4 + x^3) \ln 5} - \frac{(24x^2 + 8x) \log_5 x}{(2x^3 + x^2)^2},$$

$$y'' = \frac{-4(8x^3 + 3x^2)}{(2x^4 + x^3)^2 \ln 5} -$$

$$\frac{\left((48x + 8) \log_5 x + \left(\frac{24x^2 + 8x}{x \ln 5} \right) \right) (2x^3 + x^2)^2 - (24x^2 + 8x) \log_5 x \cdot 2(6x^2 + 2x)}{(2x^3 + x^2)^4}.$$

4. Найдите производную сложной функции $y = f(g(x))$:

a) $y = \sqrt{\cos x}$.

Решение:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

b) $y = 2^{\operatorname{tg} x}$.

Решение:

$$y' = 2^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln 2 \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{2^{\operatorname{tg} x} \cdot \ln 2}{\cos^2 x}.$$

$$c) y = \arccos^2(e^x).$$

Решение:

$$\begin{aligned} y' &= 2 \arccos(e^x) \cdot (\arccos(e^x))' = 2 \arccos(e^x) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot (e^x)' = \\ &= \frac{-2 \cdot (e^x) \arccos(e^x)'}{\sqrt{1-(e^x)^2}}. \end{aligned}$$

$$d) y = (\sin 2x) \cdot \log_2 x.$$

Решение:

$$\begin{aligned} y' &= (\sin 2x)' \cdot \log_2 x + (\sin 2x) \cdot (\log_2 x)' = \\ &= \cos 2x (2x)' \cdot \log_2 x + (\sin 2x) \cdot \frac{1}{x \ln 2} = 2 \cos 2x \cdot \log_2 x + \frac{\sin 2x}{x \ln 2}. \end{aligned}$$

$$e) y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \cdot (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg} x}} \cdot \frac{-1}{1+x^2} = \\ &= \frac{-1}{2(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}. \end{aligned}$$

$$f) y = \frac{\ln 2x}{\cos x}.$$

Решение:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\ln 2x)' \cdot \cos x - \ln 2x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\frac{1}{2x} (2x)' \cdot \cos x + \ln 2x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{x} \cdot \cos x + \ln 2x \cdot \sin x}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

5. Найдите производную функции $y = f(x)$ с помощью логарифмического дифференцирования:

a) $y = x^{\ln(\cos x)}$.

Решение:

$$\ln y = \ln x^{\ln(\cos x)}, \ln y = \ln(\cos x) \cdot \ln x,$$

$$(\ln y)' = (\ln(\cos x))' \cdot \ln x + \ln(\cos x) \cdot (\ln x)',$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{-\sin x}{\cos x} \cdot \ln x + \ln(\cos x) \cdot \frac{1}{x},$$

$$y' = \left(-\operatorname{tg} x \cdot \ln x + \frac{\ln(\cos x)}{x} \right) \cdot y,$$

$$y' = \left(-\operatorname{tg} x \cdot \ln x + \frac{\ln(\cos x)}{x} \right) \cdot x^{\ln(\cos x)}.$$

b) $y = \left(x + x^2 \right)^x$.

Решение:

$$\ln y = \ln \left(x + x^2 \right)^x, \ln y = x \cdot \ln \left(x + x^2 \right),$$

$$(\ln y)' = x' \cdot \ln \left(x + x^2 \right) + x \cdot \left(\ln \left(x + x^2 \right) \right)',$$

$$\frac{y'}{y} = \ln \left(x + x^2 \right) + x \cdot \frac{1 + 2x}{x + x^2},$$

$$\frac{y'}{y} = \ln \left(x + x^2 \right) + \frac{1 + 2x}{1 + x},$$

$$y' = \left(\ln \left(x + x^2 \right) + \frac{1 + 2x}{1 + x} \right) \cdot y,$$

$$y' = \left(\ln \left(x + x^2 \right) + \frac{1 + 2x}{1 + x} \right) \cdot \left(x + x^2 \right)^x.$$

c) $y = (\sin x)^{\ln x}$.

Решение:

$$\ln y = \ln(\sin x)^{\ln x}, \ln y = \ln x \cdot \ln(\sin x),$$

$$(\ln y)' = (\ln x)' \cdot \ln(\sin x) + \ln x \cdot (\ln(\sin x))',$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} \cdot \ln(\sin x) + \ln x \cdot \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$y' = \left(\frac{\ln(\sin x)}{x} + \ln x \cdot \operatorname{ctgx} \right) \cdot y,$$

$$y' = \left(\frac{\ln(\sin x)}{x} + \ln x \cdot \operatorname{ctgx} \right) \cdot (\sin x)^{\ln x}.$$

$$d) y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{2+x^2}}.$$

Решение:

$$\ln y = \ln \sqrt[3]{\frac{x^2}{2+x^2}}, \quad \ln y = \frac{1}{3} \cdot \ln \frac{x^2}{2+x^2}, \quad \ln y = \frac{1}{3} \cdot (\ln x^2 - \ln(2+x^2)),$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2x}{x^2} - \frac{2x}{2+x^2} \right),$$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{2+x^2} \right) \cdot y,$$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{2+x^2} \right) \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{2+x^2}}.$$

6. Исследуйте функцию средствами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, постройте её график:

$$a) y = -x^3 - 2x^2 + 3.$$

Решение:

область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Функция общего вида: $y(-x) = -(-x)^3 - 2(-x)^2 + 3 = x^3 - 2x^2 + 3,$

$y(-x) \neq y(x), y(-x) \neq -y(x).$

Точки пересечения с осями координат:

$-x^3 - 2x^2 + 3 = 0, x^3 + 2x^2 - 3 = 0, x = 1, (1; 0)$ – точка пересечения с осью Ox ,

$y = -0^3 - 2 \cdot 0^2 + 3 = 3, (0; 3)$ – точка пересечения с осью Oy .

Функция асимптот не имеет.

Промежутки монотонности, точки экстремума:

$$y' = -3x^2 - 4x, -3x^2 - 4x = 0, x(3x + 4) = 0, x_1 = 0, x_2 = -\frac{4}{3}.$$

x	$\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right)$	$-\frac{4}{3}$	$\left(-\frac{4}{3}; 0\right)$	0	$(0; +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	убывает	$\frac{49}{27}$	возрастает	3	убывает

Точка максимума: $x=0$, точка минимума: $x=-\frac{4}{3}$.

Наибольшее значение функции: $y=3$, наименьшее значение функции: $y=\frac{49}{27}$.

Промежутки выпуклости (вогнутости), точки перегиба:

$$y'' = -6x - 4, \quad -6x - 4 = 0, \quad x = -\frac{2}{3}.$$

x	$\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$
y''	$+$	0	$-$
y	вогнутость вниз	$\frac{65}{27}$	выпуклость вверх

Точка перегиба: $x=-\frac{2}{3}$, $y=\frac{65}{27}$.

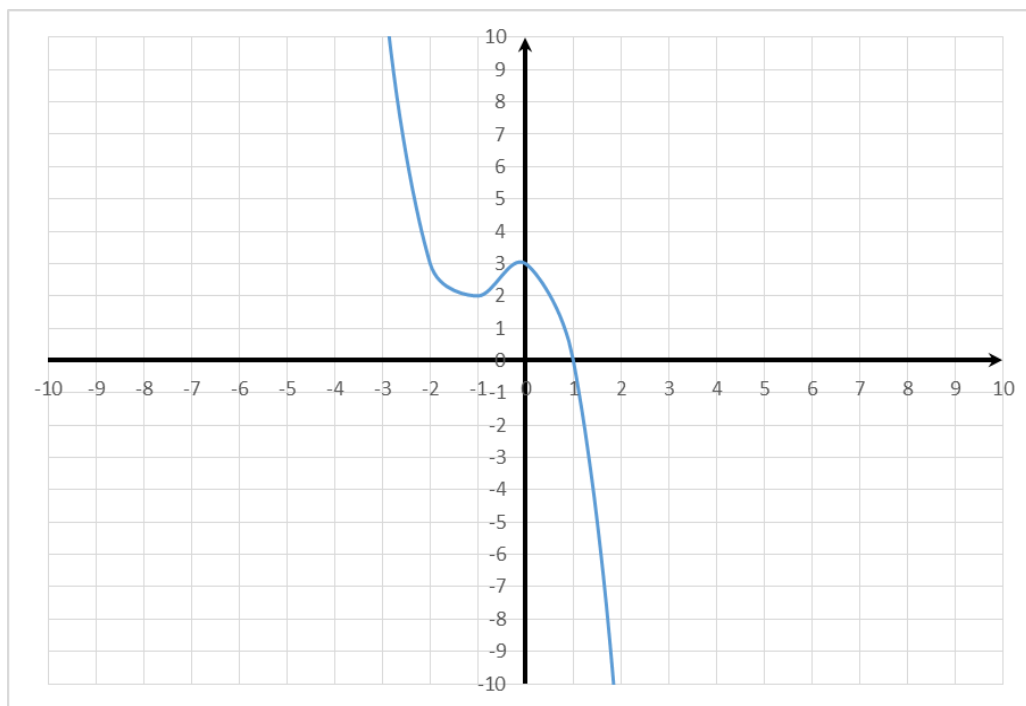


Рисунок 12

$$b) y = \frac{x^2}{x-1}.$$

Решение:

область определения функции: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Функция общего вида: $y(-x) = \frac{(-x)^2}{-x-1} = -\frac{x^2}{x+1}$, $y(-x) \neq y(x)$,

$$y(-x) \neq -y(x).$$

Точки пересечения с осями координат:

$$\frac{x^2}{x-1} = 0, x = 0, (0; 0) - \text{точка пересечения с осью } Ox,$$

$$y = \frac{0^2}{x-1} = 0, (0; 0) - \text{точка пересечения с осью } Oy.$$

Найдем асимптоты:

$x = 1$ – точка разрыва – второго рода и является вертикальной асимптотой: $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$.

Горизонтальной асимптоты нет: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x-1} = \infty$.

Наклонная асимптота имеет уравнение $y = x + 1$,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right) = 1.$$

Промежутки монотонности, точки экстремума:

$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}, \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0, \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 \neq 1.$$

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	–	не существует	–	0	+
y	возрастает	0	убывает	не существует	убывает	4	возрастает

Точка максимума: $x = 0$, точка минимума: $x = 2$.

Наибольшее значение функции: $y = -1$, наименьшее значение функции: $y = 4$.

Промежутки выпуклости (вогнутости), точки перегиба:

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)((x-1)^2 - (x^2-2x))}{(x-1)^4} = ,$$

$$= \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}, \quad \frac{2}{(x-1)^3} = 0, \quad x \neq 1.$$

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	–	не существует	+
y	выпуклость вверх	не существует	вогнутость вниз

Точек перегиба нет.

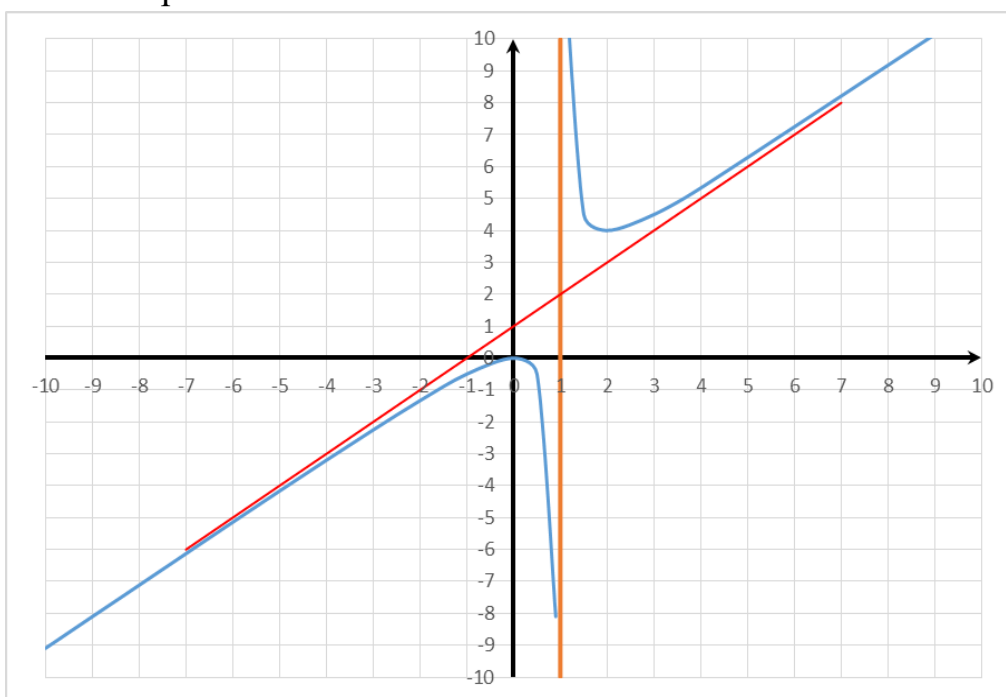


Рисунок 13

с) $y = \frac{x+2}{x-1}$.

Решение:

область определения функции: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Функция общего вида: $y(-x) = \frac{-x+2}{-x-1} = \frac{x-2}{x+1}$, $y(-x) \neq y(x)$,

$y(-x) \neq -y(x)$.

Точки пересечения с осями координат:

$\frac{x+2}{x-1} = 0$, $x = -2$, $(-2; 0)$ – точка пересечения с осью Ox ,

$y = \frac{0+2}{0-1} = -2$, $(0; -2)$ – точка пересечения с осью Oy .

Найдем асимптоты:

$x=1$ – точка разрыва – второго рода и является вертикальной асимптотой: $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x+2}{x-1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$.

Горизонтальная асимптота имеет уравнение: $y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$, $y=1$.

Наклонной асимптоты нет: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x^2-x} = 0$.

Промежутки монотонности, точки экстремума:

$$y' = \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0.$$

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	–	не существует	–
y	убывает	не существует	убывает

Точек экстремума нет.

Промежутки выпуклости (вогнутости), точки перегиба:

$$y'' = \frac{6}{(x-1)^3}, \quad \frac{6}{(x-1)^3} = 0, \quad x \neq 1.$$

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y''	–	не существует	+
y	выпуклость вверх	не существует	вогнутость вниз

Точек перегиба нет.

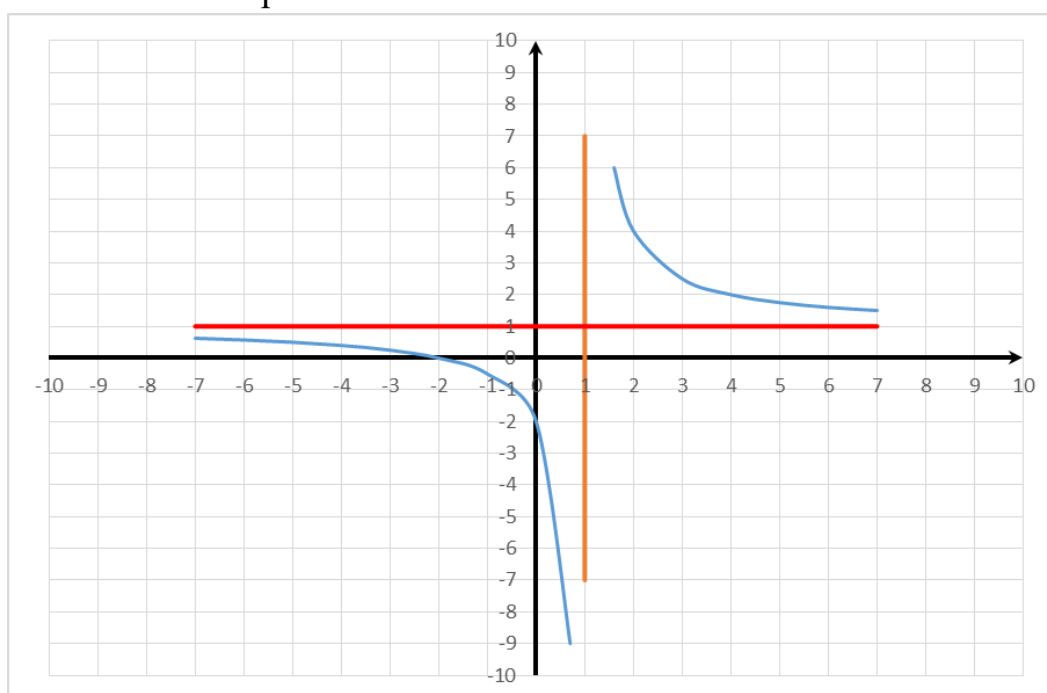


Рисунок 14

$$d) y = \frac{x^2 - 4}{x + 1}.$$

Решение:

область определения функции: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Функция общего вида: $y(-x) = \frac{(-x)^2 - 4}{-x + 1} = -\frac{x^2 - 4}{x - 1}$, $y(-x) \neq y(x)$,

$$y(-x) \neq -y(x).$$

Точки пересечения с осями координат:

$$\frac{x^2 - 4}{x + 1} = 0, \quad x = \pm 2, \quad (\pm 2; 0) - \text{точки пересечения с осью } O_x,$$

$$y = \frac{0^2 - 4}{0 + 1} = -4, \quad (0; -4) - \text{точка пересечения с осью } O_y.$$

Найдем асимптоты:

$x = -1$ – точка разрыва – второго рода и является вертикальной асимптотой: $\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = -\infty$.

Горизонтальной асимптоты нет: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x + 1} = \infty$.

Наклонная асимптота имеет уравнение $y = x - 1$,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4 - x^2 - x}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-4 - x}{x + 1} \right) = -1.$$

Промежутки монотонности, точки экстремума:

$$y' = \frac{2x(x + 1) - x^2 + 4}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 4}{(x + 1)^2}, \quad \frac{x^2 + 2x + 4}{(x + 1)^2} = 0,$$

$$x^2 + 2x + 4 = 0, \quad x + 1 \neq 0$$

$$D = 4 - 16 = -12 < 0, \quad x \neq -1.$$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; +\infty)$
y'	$+$	не существует	$+$
y	возрастает	не существует	возрастает

Точек экстремума нет.

Промежутки выпуклости (вогнутости), точки перегиба:

$$y'' = \frac{(2x + 2)(x + 1)^2 - 2(x + 1)(x^2 + 2x + 4)}{(x + 1)^4} = \frac{2(x + 1)((x + 1)^2 - (x^2 + 2x + 4))}{(x + 1)^4} =$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x - 4}{(x+1)^3} = \frac{-3}{(x+1)^3}, \quad \frac{-3}{(x+1)^3} = 0, \quad x \neq -1.$$

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; +\infty)$
y''	+	не существует	—
y	вогнутость вниз	не существует	выпуклость вверх

Точек перегиба нет.

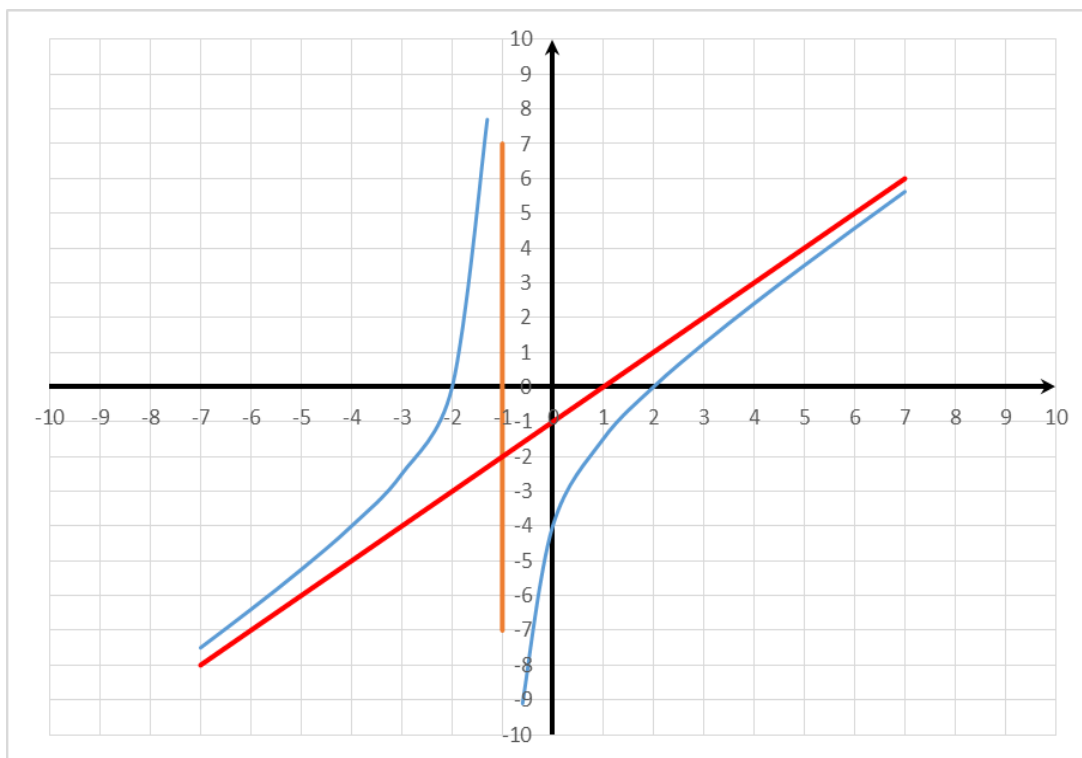


Рисунок 15

7. Вычислите интегралы:

$$a) \int \left(x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2\sqrt{x}} + 2 \right) dx.$$

Решение:

$$\begin{aligned} \int \left(x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2\sqrt{x}} + 2 \right) dx &= \int \left(x^3 - 2x^{0,5} + \frac{3}{x} - 4x^{-2,5} + 2 \right) dx = \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{2x^{1,5}}{1,5} + 3\ln|x| - \frac{4x^{-1,5}}{-1,5} + 2x + C = \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{4x^{1,5}}{3} + 3\ln|x| + \frac{8}{3x^{1,5}} + 2x + C. \end{aligned}$$

b) $\int (2-x) \cos x \, dx$.

Решение:

$$\int (2-x) \cos x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = 2-x, \quad \cos x \, dx = dv, \\ du = -dx, \quad \sin x = v \end{array} \right] =$$

$$= (2-x) \sin x + \int \sin x \, dx = (2-x) \sin x - \cos x + c.$$

c) $\int \frac{x+18}{x^2-4x-12} \, dx$.

Решение:

$$\int \frac{x+18}{x^2-4x-12} \, dx = \int \frac{x+18}{(x-6)(x+2)} \, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \frac{x+18}{(x-6)(x+2)} = \frac{A}{x-6} + \frac{B}{x+2} = \frac{Ax+2A+Bx-6B}{(x-6)(x+2)}, \\ \left\{ \begin{array}{l} A+B=1; \\ 2A-6B=18. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A+B=1; \\ A-3B=9. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A+B=1; \\ 4B=-8. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} A=3; \\ B=-2. \end{array} \right. \end{array} \right] =$$

$$= 3 \int \frac{dx}{x-6} - 2 \int \frac{dx}{x+2} = 3 \ln|x-6| - 2 \ln|x+2| + c.$$

d) $\int \frac{x^4}{1+x^2} \, dx$.

Решение:

$$\int \frac{x^4}{1+x^2} \, dx = \left[\frac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right] = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctg x + c.$$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt{x+1}}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt{x+1}} = \left[\begin{array}{l} x+1 = t^4, \\ dx = 4t^3 dt, \\ \sqrt{x+1} = t^2, \\ \sqrt[4]{x+1} = t \end{array} \right] = \int \frac{4t^3 dt}{t-t^2} = 4 \int \frac{t^2 dt}{1-t} =$$

$$= 4 \int \left(-t - 1 + \frac{1}{1-t} \right) dt = 4 \left(-\frac{t^2}{2} - t - \ln|1-t| \right) + c =$$

$$= 4 \left(-\frac{\sqrt{x+1}}{2} - \sqrt[4]{x+1} - \ln|1-\sqrt[4]{x+1}| \right) + c.$$

f) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^4 x}.$

Решение:

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^4 x} = \left[\begin{array}{l} \cos x = t, \\ -\sin x dx = dt, \sin x dx = -dt \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^4} = -\frac{1}{3t^3} + c = -\frac{1}{3\cos^3 x} + c.$$

k) $\int \sin^3 x dx.$

Решение:

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin x \sin^2 x dx = \int \sin x (1 - \cos^2 x) dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \cos x = t, \\ -\sin x dx = dt, \sin x dx = -dt \end{array} \right] = -\int (1 - t^2) dt = \int (t^2 - 1) dt = \frac{t^3}{3} - t + c =$$

$$= \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c.$$

m) $\int_2^3 (4x^3 - 6x + 1) dx.$

Решение:

$$\int_2^3 (4x^3 - 6x + 1) dx = (x^4 - 3x^2 + x) \Big|_2^3 = (3^4 - 3 \cdot 3^2 + 3) - (2^4 - 3 \cdot 2^2 + 2) =$$

$$= 81 - 27 + 3 - 16 + 12 - 2 = 51.$$

n) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx.$

Решение:

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 4} = t, \quad x^2 + 4 = t^2, \\ 2x dx = 2t dt, \quad x dx = t dt, \\ \begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline t & \sqrt{5} & 2\sqrt{2} \end{array} \end{array} \right] = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \frac{t dt}{t} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} dt =$$

$$= t \Big|_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - \sqrt{5}.$$

$$o) \int_{2\pi}^{3\pi} x \cdot \sin x \, dx.$$

Решение:

$$\int_{2\pi}^{3\pi} x \cdot \sin x \, dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad \sin x \, dx = dv, \\ du = dx, \quad -\cos x = v \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned} \int_{2\pi}^{3\pi} x \cdot \sin x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = x, \quad \sin x \, dx = dv, \\ du = dx, \quad -\cos x = v \end{array} \right] = -x \cos x \Big|_{2\pi}^{3\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} \cos x \, dx = \\ &= -3\pi \cos 3\pi + 2\pi \cos 2\pi + \sin x \Big|_{2\pi}^{3\pi} = 3\pi + 2\pi = 5\pi. \end{aligned}$$

8. Вычислите площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми:

$$a) y = x^2, y = 1.$$

Решение:

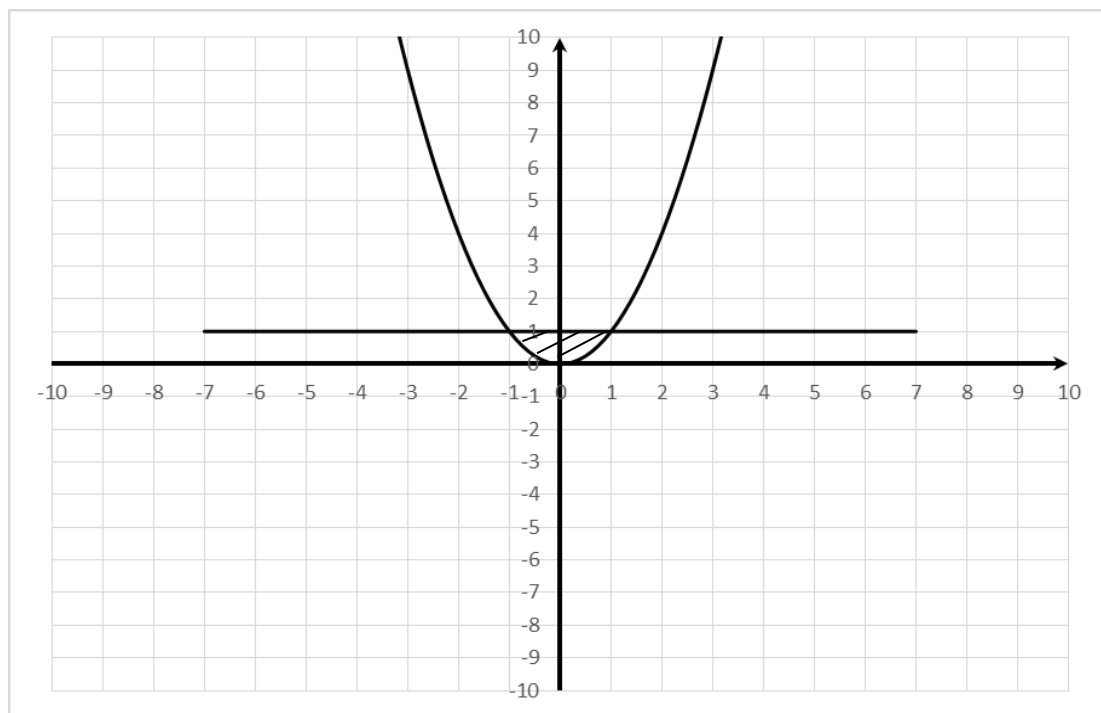


Рисунок 16

Найдем точки пересечения графиков функций:

$$y = x^2, y = 1, 1 = x^2, x_{1,2} = \pm 1.$$

$$S = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

b) $y = x^3 + 3$, $x = 0$, $y = x - 1$, $x = 2$.

Решение:

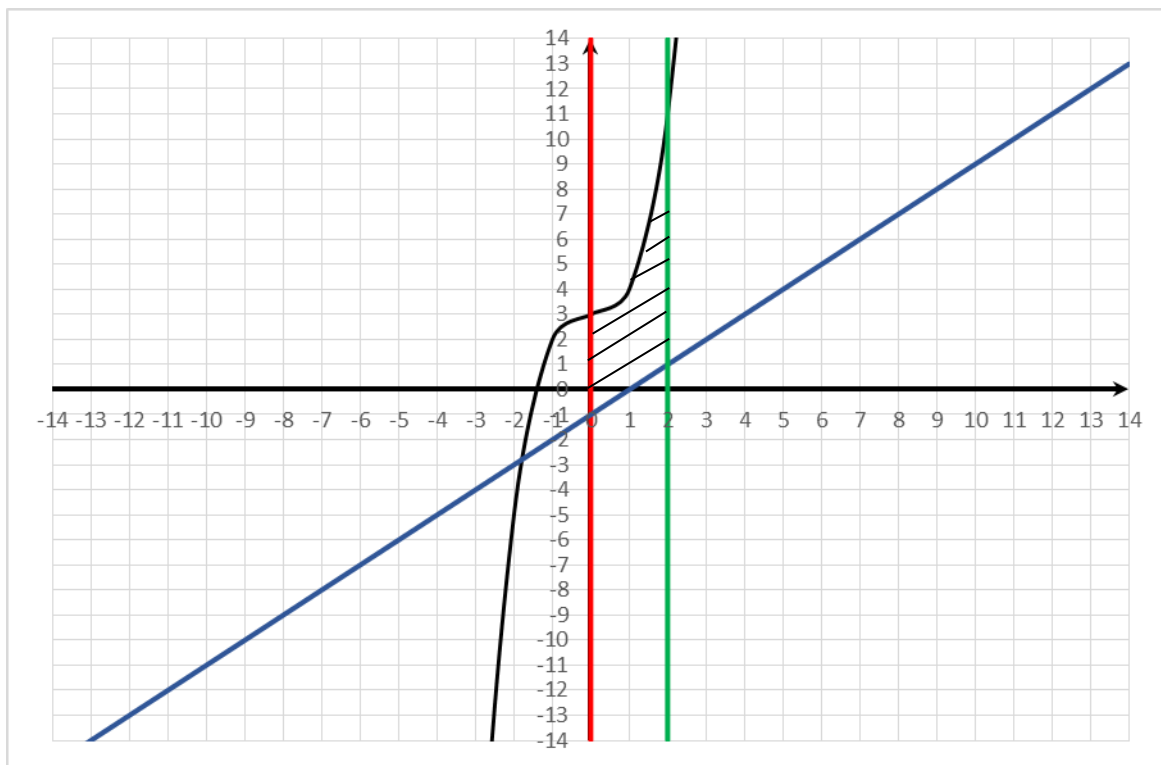


Рисунок 17

$$S = \int_0^2 (x^3 + 3 - x + 1) dx = \int_0^2 (x^3 + 4 - x) dx = \left(\frac{x^4}{4} + 4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = 4 + 8 - 2 = 10.$$

9. Найдите общее решение дифференциальных уравнений:

a) $y' - y = e^x$.

Решение:

$y' - y = e^x$ — линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Метод Бернулли

$$y = uv, \quad y' = u'v + uv',$$

$$u'v + uv' - uv = e^x, \quad u'v + u(v' - v) = e^x,$$

$$\begin{cases} v' - v = 0; \\ u'v = e^x. \end{cases}$$

$$v' - v = 0, \quad v' = v, \quad \frac{dv}{dx} = v, \quad \frac{dv}{v} = dx, \quad \int \frac{dv}{v} = \int dx, \quad \ln|v| = x + c, \quad c = 0, \\ \ln|v| = x, \quad v = e^x.$$

$$u'v = e^x, \quad u'e^x = e^x, \quad u' = 1, \quad \frac{du}{dx} = 1, \quad du = dx, \quad \int du = \int dx, \quad u = x + c.$$

$y = uv = (x + c) \cdot e^x$ – общее решение ЛДУ первого порядка.

$$b) \quad y' - \frac{1}{x}y = -x^2.$$

Решение:

$y' - \frac{1}{x}y = -x^2$ – линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Метод Лагранжа

Пусть $f(x) = -x^2 \equiv 0$, тогда получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$y' - \frac{1}{x}y = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln|c|, \quad \ln|y| = \ln|xc|, \quad y = xc.$$

Пусть $c = c(x)$. Найдем производную функции $y = x \cdot c(x)$:
 $y' = x' \cdot c(x) + x \cdot c'(x) = c(x) + x \cdot c'(x).$

Подставим $y = xc$ и $y' = c(x) + x \cdot c'(x)$ в исходное уравнение $y' - \frac{1}{x}y = -x^2$:

$$c(x) + x \cdot c'(x) - \frac{1}{x} \cdot x \cdot c(x) = -x^2,$$

$$c(x) + x \cdot c'(x) - c(x) = -x^2,$$

$$x \cdot c'(x) = -x^2, \quad c'(x) = -x, \quad \frac{dc(x)}{dx} = -x,$$

$$dc(x) = -x dx, \quad \int dc(x) = -\int x dx, \quad c(x) = -\frac{x^2}{2} + C.$$

Запишем общее решение дифференциального уравнения:

$$y = x \cdot c(x), \quad y = x \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + C \right).$$

$$c) \quad y' - \frac{1}{x} y = -y^2.$$

Решение:

$$y' - \frac{1}{x} y = -y^2 \text{ — уравнение Бернулли.}$$

$$y' - \frac{1}{x} y = -y^2, \quad y' y^{-2} - \frac{1}{x} y^{-1} = -1,$$

$$\text{Пусть } y^{-1} = t, \text{ тогда } -y^{-2} y' = t', \quad y^{-2} y' = -t',$$

$$-t' - \frac{1}{x} t = -1, \quad t' + \frac{1}{x} t = 1 \text{ (ЛДУ первого порядка).}$$

Метод Бернулли

$$t = uv, \quad t' = u'v + uv',$$

$$u'v + uv' + \frac{1}{x} uv = 1, \quad u'v + u\left(v' + \frac{1}{x} v\right) = 1, \quad \begin{cases} v' + \frac{1}{x} v = 0; \\ u'v = 1. \end{cases}$$

$$v' + \frac{1}{x} v = 0, \quad v' = -\frac{1}{x} v, \quad \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x} v, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -\ln|x|, \quad c = 0, \quad v = \frac{1}{x}.$$

$$u'v = 1, \quad u' \frac{1}{x} = 1, \quad du = x dx, \quad \int du = \int x dx, \quad u = \frac{x^2}{2} + c.$$

$$t = uv = \left(\frac{x^2}{2} + c \right) \frac{1}{x}, \quad y^{-1} = \left(\frac{x^2}{2} + c \right) \frac{1}{x} \quad \text{— общий интеграл}$$

дифференциального уравнения первого порядка.

$$d) \quad y'' + 3y' = 9x.$$

Решение:

$y'' + 3y' = 9x$ — линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.

$y = u + v$ – общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, где u – общее решение линейного однородного дифференциального уравнения, v – частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

$y'' + 3y' = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.

$r^2 + 3r = 0$ – характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

$r_1 = 0, r_2 = -3$ – корни характеристического уравнения.

$$u = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-3x}, \quad u = c_1 + c_2 e^{-3x}.$$

Форма частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения: $v = (Ax + B)x, v = Ax^2 + Bx$.

$$v = Ax^2 + Bx, \quad v' = 2Ax + B, \quad v'' = 2A.$$

$$2A + 3(2Ax + B) \equiv 9x,$$

$$2A + 6Ax + 3B \equiv 9x,$$

$$\begin{cases} 6A = 9; \\ 2A + 3B = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{3}{2}; \\ 3 + 3B = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{3}{2}; \\ B = -1. \end{cases}$$

$$v = \frac{3}{2}x^2 - x.$$

$$y = u + v = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x \quad - \text{общее решение линейного}$$

неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

$$e) \quad y'' + 4y = \sin 2x.$$

Решение:

$y'' + 4y = \sin 2x$ – линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.

$y = u + v$ – общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, где u – общее решение линейного однородного дифференциального уравнения, v – частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

$y'' + 4y = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.

$r^2 + 4 = 0$ – характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

$r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$ – корни характеристического уравнения.

$$u = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x).$$

Форма частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения: $v = (A \cos(2x) + B \sin(2x))x$,

$$v = Ax \cos(2x) + Bx \sin(2x).$$

$$v = Ax \cos(2x) + Bx \sin(2x),$$

$$v' = A \cos(2x) - 2Ax \sin(2x) + B \sin(2x) + 2Bx \cos(2x),$$

$$v'' = -2A \sin(2x) - 2A \sin(2x) - 4Ax \cos(2x) + 2B \cos(2x) +$$

$$+ 2B \cos(2x) - 4Bx \sin(2x).$$

$$- 2A \sin(2x) - 2A \sin(2x) - 4Ax \cos(2x) + 2B \cos(2x) +$$

$$+ 2B \cos(2x) - 4Bx \sin(2x) + 4Ax \cos(2x) + 4Bx \sin(2x) \equiv \sin 2x.$$

$$\begin{cases} -4A = 1; \\ 4B = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{4}; \\ B = 0. \end{cases}$$

$$v = -\frac{1}{4}x \cos(2x).$$

$$y = u + v = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) - \frac{1}{4}x \cos(2x) \quad - \text{общее решение}$$

линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

$$f) y'' - 3y' = e^x (\sin x + \cos x).$$

Решение:

$y'' - 3y' = e^x (\sin x + \cos x)$ – линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.

$y = u + v$ – общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, где u – общее решение линейного однородного дифференциального уравнения, v – частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

$y'' - 3y' = 0$ – линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.

$r^2 - 3r = 0$ – характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

$r_1 = 0$, $r_2 = 3$ – корни характеристического уравнения.

$$u = c_1 e^{0x} + c_2 e^{3x}, u = c_1 + c_2 e^{3x}.$$

Форма частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения: $v = (A \cos x + B \sin x) e^x,$

$$v = Ae^x \cos x + Be^x \sin x.$$

$$v = Ae^x \cos x + Be^x \sin x,$$

$$v' = Ae^x \cos x - Ae^x \sin x + Be^x \sin x + Be^x \cos x,$$

$$v'' = Ae^x \cos x - Ae^x \sin x - Ae^x \sin x - Ae^x \cos x +$$

$$+ Be^x \sin x + Be^x \cos x + Be^x \cos x - Be^x \sin x.$$

$$Ae^x \cos x - Ae^x \sin x - Ae^x \sin x - Ae^x \cos x +$$

$$+ Be^x \sin x + Be^x \cos x + Be^x \cos x - Be^x \sin x - 3Ae^x \cos x +$$

$$+ 3Ae^x \sin x - 3Be^x \sin x - 3Be^x \cos x \equiv e^x (\sin x + \cos x),$$

$$A \sin x - B \cos x - 3A \cos x - 3B \sin x \equiv \sin x + \cos x.$$

$$\begin{cases} A - 3B = 1; \\ -B - 3A = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 + 3B; \\ -B - 3(1 + 3B) = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 + 3B; \\ -10B = 4. \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{5}; \\ B = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

$$v = -\frac{1}{5} e^x \cos x - \frac{2}{5} e^x \sin x.$$

$$y = u + v = c_1 + c_2 e^{3x} - \frac{1}{5} e^x \cos x - \frac{2}{5} e^x \sin x \quad - \quad \text{общее решение}$$

линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

15. Найти частное решение дифференциальных уравнений:

$$a) xy' + y = -x, y(1) = \frac{1}{2}.$$

Решение:

$xy' + y = -x$ — линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

$$y = uv, y' = u'v + uv', \quad xu'v + xuv' + uv = -x,$$

$$xu'v + u(xv' + v) = -x,$$

$$\begin{cases} xv' + v = 0; \\ xu'v = -x; \end{cases} \quad \begin{cases} xv' + v = 0; \\ u'v = -1. \end{cases}$$

$$xv' + v = 0, \quad xv' = -v, \quad x \frac{dv}{dx} = -v, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}, \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|v| = -\ln|x| + c, \quad c = 0, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad v = \frac{1}{x}.$$

$$u'v = -1, \quad u' \frac{1}{x} = -1, \quad u' = -x, \quad \frac{du}{dx} = -x, \quad du = -x dx, \quad \int du = -\int x dx,$$

$$u = -\frac{x^2}{2} + c.$$

$$y = uv = \left(-\frac{x^2}{2} + c \right) \cdot \frac{1}{x} - \text{общее решение ЛДУ первого порядка.}$$

$$\frac{1}{2} = \left(-\frac{1^2}{2} + c \right) \cdot \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + c, \quad c = 1, \quad y = \left(-\frac{x^2}{2} + 1 \right) \cdot \frac{1}{x} - \text{частное}$$

решение ЛДУ первого порядка.

$$b) \quad y'' - 3y' = 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$$

Решение:

$y'' - 3y' = 2x$ — линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка.

$y = u + v$ — общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка, где u — общее решение линейного однородного дифференциального уравнения, v — частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

$y'' - 3y' = 0$ — линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка.

$r^2 - 3r = 0$ — характеристическое уравнение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 3 - \text{корни характеристического уравнения.}$$

$$u = c_1 e^{0x} + c_2 e^{3x}, \quad u = c_1 + c_2 e^{3x}.$$

Форма частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения: $v = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx$.

$$v = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx,$$

$$v' = 2Ax + B, \quad v'' = 2A, \quad 2A - 6Ax - 3B = 2x,$$

$$\begin{cases} -6A = 2; \\ 2A - 3B = 0; \end{cases} \begin{cases} A = -\frac{1}{3}; \\ 2A - 3B = 0; \end{cases} \begin{cases} A = -\frac{1}{3}; \\ -\frac{2}{3} - 3B = 0; \end{cases} \begin{cases} A = -\frac{1}{3}; \\ B = -\frac{2}{9}. \end{cases}$$

$$v = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x.$$

$$y = u + v = c_1 + c_2 e^{3x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x \quad - \quad \text{общее решение линейного}$$

неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

$$y' = 3c_2 e^{3x} - \frac{2}{3}x - \frac{2}{9}, \begin{cases} 2 = c_1 + c_2; \\ 4 = 3c_2 - \frac{2}{9}; \end{cases} \begin{cases} 2 = c_1 + c_2; \\ c_2 = \frac{38}{18}; \end{cases} \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{9}; \\ c_2 = \frac{19}{9}. \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{9} + \frac{19}{9}e^{3x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x \quad - \quad \text{частное решение линейного}$$

неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

ТЕМА 3. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Литература: основная: [4], [6]; дополнительная: [8].

Интернет-ресурсы: [1-3].

Теоретические вопросы

1. Определение испытания, события. Виды событий. Виды случайных событий.
2. Классическое определение вероятности. Свойства вероятности.
3. Геометрическое определение вероятности.
4. Формулы комбинаторики.
5. Операции над событиями. Теоремы сложения вероятностей. Теоремы произведения вероятностей.
6. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
7. Схема Бернулли

Примеры решения типовых практических заданий (задач)

1. В урне содержится 5 белых и 4 черных шара. Вынимаются наудачу два шара. Найти вероятность того, что хотя бы один из них черный.

Решение:

обозначим событие A – {из двух вынутых шаров хотя бы один черный},

обозначим событие \bar{A} – {из двух вынутых шаров нет черных шаров, т. е. оба шара белые}.

$$P(\bar{A}) = \frac{C_5^2}{C_{5+4}^2} = \frac{C_5^2}{C_9^2} = \frac{5! \cdot 2! \cdot (9-2)!}{2! \cdot (5-2)! \cdot 9!} = \frac{5! \cdot 7!}{3! \cdot 9!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7!}{3! \cdot 7! \cdot 8 \cdot 9} = \frac{4 \cdot 5}{8 \cdot 9} = \frac{5}{18}.$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18} \approx 0,722.$$

2. Среди 100 лотерейных билетов есть 10 выигрышных. Какова вероятность того, что два наудачу выбранных билета окажутся выигрышными?

Решение:

обозначим событие B – {два наудачу выбранных билета окажутся выигрышными}.

$$P(B) = \frac{C_{10}^2}{C_{100}^2} = \frac{10! \cdot 2! \cdot (100-2)!}{2! \cdot (10-2)! \cdot 100!} = \frac{10! \cdot 98!}{8! \cdot 100!} = \frac{8! \cdot 9 \cdot 10 \cdot 98!}{8! \cdot 98! \cdot 99 \cdot 100} = \frac{9 \cdot 10}{99 \cdot 100} = \frac{1}{110} \approx 0,009.$$

3. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9, а вторым – 0,85. Оба стрелка стреляют одновременно. Найти вероятность того, что цель будет поражена.

Решение:

обозначим события A – {цель поражена первым стрелком}, B – {цель поражена вторым стрелком}. Так как события независимые и совместные, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

$$P(A + B) = 0,9 + 0,85 - 0,9 \cdot 0,85 = 0,985.$$

4. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,95, а вторым – 0,80. Оба стрелка стреляют одновременно. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком.

Решение:

обозначим событие A – {цель поражена первым стрелком}, B – {цель поражена вторым стрелком}. Так как события независимые, то

$$P(C) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(B) \cdot P(\bar{A}) = 0,95 \cdot (1 - 0,80) + 0,80 \cdot (1 - 0,95) = 0,23.$$

5. В электрическую цепь параллельно включены три независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05; 0,1; 0,2. Найти вероятность того, что в цепи не будет тока.

Решение:

обозначим A_1 – {отказ первого элемента}, A_2 – {отказ второго элемента}, A_3 – {отказ третьего элемента}, A – {отсутствие тока в цепи}. При параллельном включении ток в цепи отсутствует при выходе из строя всех трех элементов. Тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, и, так как по условию задачи события независимые, то $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$.

$$\text{Следовательно, } P(A) = 0,05 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 0,001.$$

6. Три стрелка произвели по одному выстрелу по намеченной цели. Вероятность попадания 1-м стрелком равна 0,6, 2-м – 0,7, 3-м – 0,8. При одном попадании в мишень вероятность поражения цели равна 0,2, при двух – 0,6, при трех – цель заведомо поражается. Найти вероятность поражения цели.

Решение:

событие A – {цель поражена}.

Рассмотрим гипотезы:

H_1 – {в цель попал один стрелок};

H_2 – {в цель попали два стрелка};

H_3 – {в цель попали три стрелка};

H_4 – {все стрелки промахнулись}.

Тогда

$$P(H_1) = 0,6 \cdot (1 - 0,7) \cdot (1 - 0,8) + (1 - 0,6) \cdot 0,7 \cdot (1 - 0,8) + (1 - 0,6) \cdot (1 - 0,7) \cdot 0,8 = 0,188,$$

$$P(H_2) = (1 - 0,6) \cdot 0,7 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot (1 - 0,7) \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,7 \cdot (1 - 0,8) = 0,452,$$

$$P(H_3) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336,$$

$$P(H_4) = (1 - 0,6) \cdot (1 - 0,7) \cdot (1 - 0,8) = 0,024.$$

Из условия задачи:

$$P(A / H_1) = 0,2, \quad P(A / H_2) = 0,6, \quad P(A / H_3) = 1, \quad P(A / H_4) = 0.$$

Поскольку все H_i составляют полную группу событий, а событие A может произойти только с наступлением одной из гипотез, то применима формула полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) + P(H_3)P(A / H_3) + P(H_4)P(A / H_4),$$

$$P(A) = 0,188 \cdot 0,2 + 0,452 \cdot 0,6 + 0,336 \cdot 1 + 0,024 \cdot 0 = 0,6448.$$

7. 45% телевизоров, имеющих в магазине, поставляются первой фирмой, 15% – второй, остальные – третьей. Вероятности того, что телевизоры, поставленные этими фирмами, не потребуют ремонта в течение гарантийного срока, равны 0,90, 0,84 и 0,96 соответственно. купленный наудачу телевизор выдержал гарантийный срок работы. Какова вероятность, что он был поставлен III фирмой?

Решение:

событие A – {купленный наудачу телевизор выдержал гарантийный срок работы}.

Рассмотрим гипотезы:

H_1 – {телевизор изготовлен на первом заводе};

H_2 – {телевизор изготовлен на втором заводе};

H_3 – {телевизор изготовлен на третьем заводе}.

Тогда

$$P(H_1) = \frac{45}{100} = 0,45, \quad P(H_2) = \frac{15}{100} = 0,15, \quad P(H_3) = 1 - \frac{45 + 15}{100} = 0,40.$$

Из условия задачи

$$P(A / H_1) = 0,9, \quad P(A / H_2) = 0,84, \quad P(A / H_3) = 0,96.$$

Поскольку все H_i составляют полную группу событий, а событие A может произойти только с наступлением одной из гипотез, то применима формула полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3),$$

$$P(A) = 0,45 \cdot 0,9 + 0,15 \cdot 0,84 + 0,4 \cdot 0,96 = 0,915.$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,96}{0,915} \approx 0,4197.$$

8. Банк выдал пять кредитов. Вероятность того, что кредит не будет погашен в срок, равна 0,1. Найти вероятность того, что в срок не будут погашены 3 кредита.

Решение:

воспользуемся формулой Бернулли: $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где $n = 5$, $k = 3$, $p = 0,1$ и $q = 0,9$.

$$\text{Следовательно, } P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^{5-3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^2 = 0,0081.$$

9. В урне 3 белых и 4 черных шара. Из нее наудачу извлекли 3 шара. Составить закон распределения случайной величины – числа извлеченных черных шаров.

Решение:

обозначим случайную величину X – {число извлеченных черных шаров}.

$$\begin{aligned} P(X = 0 - \text{черных}, 3 - \text{белых}) &= \frac{C_4^0 \cdot C_3^3}{C_7^3} = \frac{4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot (7-3)! \cdot 3!}{0! \cdot (4-0)! \cdot 3! \cdot (3-0)! \cdot 7!} = \\ &= \frac{4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 3!}{0! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 7!} = \frac{4! \cdot 3!}{7!} = \frac{4! \cdot 2 \cdot 3}{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{35}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 1 - \text{черный}, 2 - \text{белых}) &= \frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_7^3} = \frac{4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot (7-3)!}{1! \cdot (4-1)! \cdot 2! \cdot (3-2)! \cdot 7!} = \\ &= \frac{4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 4!}{1! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 7!} = \frac{4! \cdot 3! \cdot 4!}{2! \cdot 7!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 4!}{2! \cdot 4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3!}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{12}{35}, \end{aligned}$$

$$P(X = 2 - \text{черных}, 1 - \text{белый}) = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_7^3} = \frac{4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot (7-3)!}{2! \cdot (4-2)! \cdot 1! \cdot (3-1)! \cdot 7!} =$$

$$= \frac{4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 4!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 7!} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2! \cdot 3 \cdot 2! \cdot 3 \cdot 4!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{18}{35},$$

$$P(X = 3 - \text{черных}, 0 - \text{белых}) = \frac{C_4^3 \cdot C_3^0}{C_7^3} = \frac{4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot (7-3)!}{3! \cdot (4-3)! \cdot 0! \cdot (3-0)! \cdot 7!} =$$

$$= \frac{4! \cdot 3! \cdot 3! \cdot 4!}{3! \cdot 1! \cdot 0! \cdot 3! \cdot 7!} = \frac{4! \cdot 4!}{7!} = \frac{4! \cdot 4!}{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{4}{35}.$$

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

10. По мишени произведено четыре выстрела. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8. Составить закон распределения случайной величины – числа попаданий в мишень.

Решение:

обозначим случайную величину X – {число попаданий в мишень}.

$$P(X = 0 - \text{попаданий}) = C_4^0 \cdot 0,8^0 \cdot (1-0,8)^{4-0} = \frac{4!}{0! \cdot (4-0)!} \cdot 1 \cdot 0,2^4 =$$

$$= \frac{4!}{0! \cdot 4!} \cdot 0,2^4 = 0,0016,$$

$$P(X = 1 - \text{попадание}) = C_4^1 \cdot 0,8^1 \cdot (1-0,8)^{4-1} = \frac{4!}{1! \cdot (4-1)!} \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^3 =$$

$$= \frac{4!}{1! \cdot 3!} \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^3 = 4 \cdot 0,8 \cdot 0,008 = 0,0256,$$

$$P(X = 2 - \text{попадания}) = C_4^2 \cdot 0,8^2 \cdot (1-0,8)^{4-2} = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 =$$

$$= \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 6 \cdot 0,64 \cdot 0,04 = 0,1536,$$

$$P(X = 3 - \text{попадания}) = C_4^3 \cdot 0,8^3 \cdot (1-0,8)^{4-3} = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^1 =$$

$$= \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^1 = 4 \cdot 0,512 \cdot 0,2 = 0,4096,$$

$$P(X = 4 - \text{попадания}) = C_4^4 \cdot 0,8^4 \cdot (1 - 0,8)^{4-4} = \frac{4!}{4! \cdot (4-4)!} \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^0 =$$

$$= \frac{4!}{4! \cdot 0!} \cdot 0,8^4 \cdot 0,2^0 = 1 \cdot 0,4096 \cdot 1 = 0,4096.$$

X	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

11. Случайная величина X распределена следующим образом:

X	-2	-1	1	2	3
P	0,20	0,25	0,30	0,15	0,10

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X .

$$M(X) = -2 \cdot 0,2 + (-1) \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,15 + 3 \cdot 0,1 = 0,25,$$

$$M(X^2) = (-2)^2 \cdot 0,2 + (-1)^2 \cdot 0,25 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,15 + 3^2 \cdot 0,1 = 2,85,$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 2,85 - 0,0625 = 2,7875.$$

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Краснов, М. Л. Вся высшая математика [Текст]: в 7 т. / М. Л. Краснов. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. Т. 1: Аналитическая геометрия, векторная алгебра, линейная алгебра, дифференциальное исчисление. – 2014. – 336 с.
2. Краснов, М. Л. Вся высшая математика [Текст]: в 7 т. / М. Л. Краснов. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. Т. 2: Интегральное исчисление. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Дифференциальная геометрия. – 2014. – 192 с.
3. Краснов, М. Л. Вся высшая математика [Текст]: учебник в 7 т. / М. Л. Краснов. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. Т. 3: Теория рядов. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Теория устойчивости, 2014. – 192 с.
4. Краснов, М. Л. Вся высшая математика [Текст]: учебник в 7 т. / М. Л. Краснов. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2014. Т. 5: Теория вероятностей. Математическая статистика. Теория игр. – 2014. – 192 с.
5. Лунгу, К. Н. Высшая математика. Руководство к решению задач: учебное пособие / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров. — 3-е изд. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, [б. г.]. — Том 1 — 2013. — 216 с. — ISBN 978-5-9221-1500-1. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/59697> (гриф)
6. Лунгу, К. Н. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 2: учебное пособие / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров. — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 384 с. — ISBN 978-5-9221-0756-3. — Текст: электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/2255> (гриф)

Дополнительная

7. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс [Текст]: учеб. пособие / Д. Т. Письменный. – 11-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2013. – 608 с.
8. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам [Текст]: учеб. пособие / Д. Т. Письменный. – 3-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288 с.

**РЕСУРСЫ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ
СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ И
ИНФОРМАЦИОННО-СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ НЕОБХОДИМЫХ
ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

1. Информационные системы, реестры, базы и банки данных –
Официальный сайт ВНИИПО. – Режим доступа:
<http://www.vniipo.ru/institut/informatsionnye-sistemy-reestry-bazy-i-banki-danny/>
2. СДО Прометей – <https://dot.uigps.ru/close/default.asp>
3. СДО To-Study – sdo.uigps.ru/www/professor.php

Светлана Александровна Худякова
Лидия Вячеславовна Якупова
Андрей Владимирович Шпаньков

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации по подготовке к экзамену

Направление подготовки 38.03.04
Государственное и муниципальное управление

Редактор _____

Подписано в печать _____

Тираж _____ экз.

Объем 0,4 учет.-изд. л. Бумага писчая
Редакционно-издательский отдел
Уральского института ГПС МЧС России
Екатеринбург, ул. Мира, 22